THEORIE
DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN
AUS DEN EIGENSCHAFTEN DER THETAREIHEN ABGELEITET

NACH EINER VORLESUNG JACOBIS IN DESSEN AUFTRAG AUSGEARBEITET

VON

C. W. BORCHARDT.

THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN, AUS DEN EIGENSCHAFTEN DER THETAREIHEN ABGELEITET.

In meinem Werke »*Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*« bin ich, von der Betrachtung der elliptischen Integrale ausgehend, am Ende der dort angestellten Untersuchungen zu den merkwürdigen Reihen gelangt, die ich mit den Charakteren Θ und H bezeichnet habe und welche Zähler und Nenner der elliptischen Functionen $\sin\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$ bilden.

Im Folgenden beabsichtige ich, den historischen Gang der Entdeckung der elliptischen Functionen umkehrend, den entgegengesetzten Weg einzuschlagen.

Ohne irgend etwas aus der Theorie der elliptischen Transcendenten vorauszusetzen, werde ich, von den Reihen Θ und H ausgehend, mit Hülfe eines einfachen Princips die Relationen aufstellen, welchen jene Reihen genügen. Aus diesen Relationen werde ich für die Quotienten der Reihen ein Additionstheorem und aus diesem die Differentialformeln herleiten, welche unmittelbar zu den elliptischen Integralen führen.

1.

Die nach beiden Seiten in's Unendliche sich erstreckenden Reihen, welche den Ausgangspunkt der Untersuchung bilden, bestehen aus Exponentialgrössen, in welchen das reihende Element im Exponenten bis auf den zweiten Grad steigt, deren allgemeine Form also, indem man die Coefficienten sämmtlich der Einheit gleich setzt, die folgende ist:

$$\sum e^{a\nu^2+2b\nu+c},$$

so ergiebt sich:

$$(*)\begin{cases} \sum e^{a\nu^2+2b\nu} = e^{\frac{1}{4}a-b}\sum e^{\frac{1}{4}a(2\nu+1)^2+(b-\frac{1}{2}a)(2\nu+1)} \\ = \sum(-1)^\nu e^{a\nu^2+2(b-\frac{1}{2}\pi i)\nu} = i e^{\frac{1}{4}a-b}\sum(-1)^\nu e^{\frac{1}{4}a(2\nu+1)^2+(b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\pi i)(2\nu+1)}. \end{cases}$$

Setzt man

$$e^a = q, \qquad b = xi,$$

so dass nach der über a gemachten Voraussetzung der Modul von q eine zwischen 0 und 1 liegende Grösse ist (was im Folgenden immer stillschweigend angenommen wird), so erhalten die obigen vier Reihenformen folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \sum e^{a\nu^2+2b\nu} &= 1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots \\ \sum e^{\frac{1}{4}a(2\nu+1)^2+b(2\nu+1)} &= 2\sqrt[4]{q}\cos x+2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x+\cdots \\ \sum(-1)^\nu e^{a\nu^2+2b\nu} &= 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots \\ -\sum i^{2\nu+1} e^{\frac{1}{4}a(2\nu+1)^2+b(2\nu+1)} &= 2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\cdots, \end{aligned}$$

wo die Summationen auf der linken Seite sich von $\nu=-\infty$ bis $\nu=+\infty$ über alle ganzen Zahlen erstrecken.

Diesen vier Reihen soll im Folgenden die Bezeichnung $\vartheta_3(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta(x)$, $\vartheta_1(x)$, oder, wo es nöthig ist, die ausführlichere Bezeichnung $\vartheta_3(x,q)$, $\vartheta_2(x,q)$, $\vartheta(x,q)$, $\vartheta_1(x,q)$ gegeben werden, so dass die vier zu betrachtenden Thetafunctionen durch die Gleichungen:

$$(1.)\begin{cases} \vartheta(x) = \sum(-1)^\nu q^{\nu^2} e^{2\nu xi} = 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots \\ \vartheta_1(x) = -\sum i^{2\nu+1} q^{\frac{1}{4}(2\nu+1)^2} e^{(2\nu+1)xi} = 2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\cdots \\ \vartheta_2(x) = \sum q^{\frac{1}{4}(2\nu+1)^2} e^{(2\nu+1)xi} = 2\sqrt[4]{q}\cos x+2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x+\cdots \\ \vartheta_3(x) = \sum q^{\nu^2} e^{2\nu xi} = 1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots \end{cases}$$

definirt werden.

Die Betrachtungen, welche zu diesen vier Functionen geführt haben, zeigen, dass man durch Aenderung des Arguments x und Hinzufügung eines Exponentialfactors von einer Function ϑ zu den drei übrigen gelangt. Führt man nämlich in $(*)$ q, x statt a, b ein, so ergiebt sich:

$$\vartheta_3(x) = \sqrt[4]{q}\, e^{-xi}\,\vartheta_2(x+\tfrac{1}{2}\lg q\,.\,i).$$

Fügt man zu dieser Formel die beiden folgenden:

$$\vartheta(x) = \vartheta_3\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \qquad \vartheta_1(x) = -\vartheta_2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

und die aus der ersten und zweiten sich ergebende:

$$\vartheta(x) = -i\sqrt[4]{q}\, e^{-xi}\, \vartheta_2(x+\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}\lg q.i)$$

hinzu, so sieht man, dass aus $\vartheta_2(x)$ durch Aenderung des Arguments um $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\lg q.i$ und $\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\lg q.i$ und Multiplication mit dem geeigneten Exponentialfactor die drei übrigen ϑ-Functionen hervorgehen. Ebenso verhält es sich mit $\vartheta(x)$, $\vartheta_1(x)$, $\vartheta_3(x)$. Eine vollständige Uebersicht über den Uebergang der ϑ-Functionen in einander gewährt folgendes System von Formeln:

$$(2.)\quad \left\{\begin{array}{ll|ll|ll}
\vartheta\,(x+\frac{1}{2}\pi) = & \vartheta_3(x) & \vartheta\,(x+\frac{1}{2}\lg q.i) = & -if.\vartheta_1(x) & \vartheta\,(x+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\lg q.i) = & f.\vartheta_2(x) \\
\vartheta_1(x+\frac{1}{2}\pi) = & \vartheta_2(x) & \vartheta_1(x+\frac{1}{2}\lg q.i) = & -if.\vartheta\,(x) & \vartheta_1(x+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\lg q.i) = & f.\vartheta_3(x) \\
\vartheta_2(x+\frac{1}{2}\pi) = & -\vartheta_1(x) & \vartheta_2(x+\frac{1}{2}\lg q.i) = & f.\vartheta_3(x) & \vartheta_2(x+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\lg q.i) = & if.\vartheta\,(x) \\
\vartheta_3(x+\frac{1}{2}\pi) = & \vartheta\,(x) & \vartheta_3(x+\frac{1}{2}\lg q.i) = & f.\vartheta_2(x) & \vartheta_3(x+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\lg q.i) = & -if.\vartheta_1(x),
\end{array}\right.$$

wo

$$f = q^{-\frac{1}{4}} e^{x}.$$

Mit Hülfe der Formeln

$$(3.)\quad \left\{\begin{array}{ll@{\qquad}ll}
\vartheta\,(-x) = & \vartheta\,(x) & \vartheta\,(x+\pi) = & \vartheta\,(x) \\
\vartheta_1(-x) = & -\vartheta_1(x) & \vartheta_1(x+\pi) = & -\vartheta_1(x) \\
\vartheta_2(-x) = & \vartheta_2(x) & \vartheta_2(x+\pi) = & -\vartheta_2(x) \\
\vartheta_3(-x) = & \vartheta_3(x) & \vartheta_3(x+\pi) = & \vartheta_3(x)
\end{array}\right.$$

kann man aus (2.) ähnliche Formeln für die Aenderung des Arguments x um $-\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\lg q.i$, $-\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\lg q.i$ ableiten.

2.

Die Function $\vartheta_3(x)$ wird in ihrer ursprünglich betrachteten Gestalt als unendliche Reihe von Exponentialgrössen durch die Gleichung

$$\vartheta_3(x) = \sum q^{\nu^2} e^{2\nu xi} = \sum e^{\nu^2 \lg q + 2\nu xi}$$

definirt, wo die Summation sich von $\nu = -\infty$ bis $\nu = +\infty$ erstreckt. Der Exponent von e lässt sich auf die Form

$$\frac{1}{\lg q}[(\nu \lg q + xi)^2 + x^2]$$

bringen, woraus für $\vartheta_3(x)$ die Darstellung:

$$(4.)\qquad \vartheta_3(x) = e^{\frac{1}{\lg q}x^2} \sum e^{\frac{1}{\lg q}[2\nu.\frac{1}{2}\lg q + xi]^2}$$

hervorgeht. Die entsprechende Darstellung der Function $\vartheta_2(x)$ ist:

$$(5.)\qquad \vartheta_2(x) = e^{\frac{1}{\lg q}x^2} \sum e^{\frac{1}{\lg q}[(2\nu+1)\frac{1}{2}\lg q + xi]^2}.$$

Diese beiden Summen unterscheiden sich nur dadurch, dass, während die eine auf alle (positiven und negativen) *graden* Zahlen 2ν auszudehnen ist, die andere sich auf alle *ungraden* Zahlen $2\nu+1$ bezieht.

Werden mehrere Reihen dieser Art mit verschiedenen Werthen des Arguments x in einander multiplicirt, so kann man das Product als eine vielfache Reihe ansehen, deren allgemeiner Term eine Exponentialgröfse ist, welche eine Quadratsumme im Exponenten hat. Von besonderem Interesse ist der Fall, in welchem man vier solche Reihen mit einander multiplicirt, weil man dann im Exponenten eine Summe von vier Quadraten erhält, auf welche eine elementare Transformationsformel sich anwenden läfst.

Es ist ein bekannter algebraischer Satz, dass man die Summe von vier Quadraten

$$a^2+b^2+c^2+d^2$$

immer auf eine zweite Art unter derselben Form darstellen kann. Bestimmt man nämlich vier neue Gröfsen a', b', c', d' durch die Formeln

$$(6.)\qquad \begin{cases} a' = \frac{1}{2}(a+b+c+d) \\ b' = \frac{1}{2}(a+b-c-d) \\ c' = \frac{1}{2}(a-b+c-d) \\ d' = \frac{1}{2}(a-b-c+d), \end{cases}$$

so wird identisch

$$(7.)\qquad a'^2+b'^2+c'^2+d'^2 = a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Es seien insbesondere a, b, c, d entweder sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade Zahlen, dann sind nach (6.) in beiden Fällen $2a', 2b', 2c', 2d'$ grade, also a', b', c', d' ganze Zahlen. Nach den aus (6.) hervorgehenden Gleichungen

$$a'+b' = a+b, \qquad a'+c' = a+c, \qquad a'+d' = a+d$$

sind überdies die drei Summen

$$a'+b', \qquad a'+c', \qquad a'+d'$$

in beiden Fällen grade Zahlen, d. h. jede der Zahlen b', c', d' ist mit a' zugleich grade und ungrade. Die vier Grössen a', b', c', d' sind also ebenfalls entweder sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade Zahlen.

Der nämliche Schlufs läfst sich rückwärts machen; denn die Gleichungen (6.), nach a, b, c, d aufgelöst, geben:

$$(8.)\quad \begin{cases} a = \frac{1}{2}(a'+b'+c'+d') \\ b = \frac{1}{2}(a'+b'-c'-d') \\ c = \frac{1}{2}(a'-b'+c'-d') \\ d = \frac{1}{2}(a'-b'-c'+d'). \end{cases}$$

Sind a', b', c', d' entweder sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade Zahlen, so sind also a, b, c, d ebenfalls sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade Zahlen.

Die beiden Zahlensysteme a, b, c, d und a', b', c', d' stehen in Reciprocität zu einander. Setzt man für a, b, c, d ein bestimmtes System von Zahlen, die entweder sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade sind, so erhält man für a', b', c', d' ein zweites System von Zahlen, die ebenfalls entweder sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade sind; setzt man ferner für a, b, c, d das zweite Zahlensystem, so erhält man für a', b', c', d' wieder das ursprüngliche Zahlensystem. Die Zahlensysteme der betrachteten Art ordnen sich daher durch die Gleichungen (6.), (8.) zu Paaren, welche einander reciprok sind.

Hieraus geht hervor, dass, wenn man für a, b, c, d alle möglichen Systeme von vier Zahlen setzt, die entweder sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade sind, die zugeordneten Gröfsen a', b', c', d' dieselben Zahlensysteme, nur in anderer Ordnung, durchlaufen und zwar so, dass keines derselben ausgelassen und keines derselben doppelt genommen werden kann. Dies Princip ist von grosser Wichtigkeit. Ist nämlich eine vierfache von der Anordnung der Glieder nicht abhängige Summe auf alle Werthe der Gröfsen a, b, c, d auszudehnen, welche sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade Zahlen sind, und substituirt man für a, b, c, d ihre in a', b', c', d' ausgedrückten Werthe (8.), so wird nach dem aufgestellten Princip die vierfache Summe ungeändert bleiben, wenn man sie auf alle Werthe der Gröfsen a', b', c', d' ausdehnt, die sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade Zahlen sind.

Nachdem dies vorausgeschickt worden ist, kehre ich zu den Darstellungen (4.), (5.) der Functionen $\vartheta_3(x)$, $\vartheta_2(x)$ zurück. Man setze in jeder dieser Gleichungen für x vier verschiedene Argumente w, x, y, z und bezeichne zugleich das reihende Element dem entsprechend mit ν, ν', ν'', ν''', so ergiebt sich:

$$\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) = e^{\frac{1}{\lg q}(w^2+x^2+y^2+z^2)}\sum e^{\frac{1}{\lg q}L}$$

$$\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) = e^{\frac{1}{\lg q}(w^2+x^2+y^2+z^2)}\sum e^{\frac{1}{\lg q}M},$$

wo

$$L = [2\nu.\tfrac{1}{2}\lg q + wi]^2 + [2\nu'.\tfrac{1}{2}\lg q + xi]^2 + [2\nu''.\tfrac{1}{2}\lg q + yi]^2 + [2\nu'''.\tfrac{1}{2}\lg q + zi]^2$$

$$M = [(2\nu+1)\tfrac{1}{2}\lg q + wi]^2 + [(2\nu'+1)\tfrac{1}{2}\lg q + xi]^2 + [(2\nu''+1)\tfrac{1}{2}\lg q + yi]^2 + [(2\nu'''+1)\tfrac{1}{2}\lg q + zi]^2$$

und die Summation in der ersten Gleichung auf alle positiven und negativen graden Zahlen 2ν, $2\nu'$, $2\nu''$, $2\nu'''$, in der zweiten auf alle positiven und negativen ungraden Zahlen $2\nu+1$, $2\nu'+1$, $2\nu''+1$, $2\nu'''+1$ auszudehnen ist.

Die Addition beider Gleichungen ergiebt daher:

$$(9.)\quad \vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) + \vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) = e^{\frac{1}{\lg q}(w^2+x^2+y^2+z^2)}\sum e^{\frac{1}{\lg q}N},$$

wo

$$N = [a.\tfrac{1}{2}\lg q + wi]^2 + [b.\tfrac{1}{2}\lg q + xi]^2 + [c.\tfrac{1}{2}\lg q + yi]^2 + [d.\tfrac{1}{2}\lg q + zi]^2$$

und die Summation auf alle Systeme von vier graden oder vier ungraden Zahlen a, b, c, d auszudehnen ist.

Man führe in den Exponenten $\frac{1}{\lg q}N$ der Gleichung (9.) an Stelle der Gröſsen a, b, c, d die zugeordneten Gröſsen a', b', c', d' nach (8.) ein und setze überdies

$$(10.)\quad \begin{cases} w' = \tfrac{1}{2}(w+x+y+z) \\ x' = \tfrac{1}{2}(w+x-y-z) \\ y' = \tfrac{1}{2}(w-x+y-z) \\ z' = \tfrac{1}{2}(w-x-y+z), \end{cases}$$

so nimmt Gleichung (9.) folgende Gestalt an:

$$\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) + \vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) = e^{\frac{1}{\lg q}(w'^2+x'^2+y'^2+z'^2)}\sum e^{\frac{1}{\lg q}N},$$

wo N unter Benutzung der Gleichungen (6.), (10.) in folgende neue Form übergeht:

$$N = [a'.\tfrac{1}{2}\lg q + w'i]^2 + [b'.\tfrac{1}{2}\lg q + x'i]^2 + [c'.\tfrac{1}{2}\lg q + y'i]^2 + [d'.\tfrac{1}{2}\lg q + z'i]^2.$$

Diese Gleichung ist noch genau dieselbe wie Gleichung (9.), solange man die Summation rechter Hand auf die Gröſsen a, b, c, d bezieht. Aber nach dem oben aufgestellten Princip bleibt die Summe unverändert, wenn man sie, anstatt auf alle Werthe von a, b, c, d auszudehnen, welche sämmtlich grade oder sämmtlich ungrade Zahlen sind, auf die nämlichen Werthe der Gröſsen a', b', c', d'

ausdehnt. Hieraus folgt, dass die rechte Seite der letzten Gleichung nichts anderes ist als die Summe der beiden Producte:

$$\vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z')+\vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z').$$

Man hat daher folgenden Fundamentalsatz:

Bestimmt man die Variabeln w', x', y', z' aus w, x, y, z nach den Gleichungen (10.), so ist:

$$\text{(11.)}\quad \begin{aligned}&\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z)+\vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_2(z)\\ &=\vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z')+\vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z').\end{aligned}$$

Diese Formel ist das Fundament der ganzen ferneren Untersuchung. Man leitet aus ihr eine Formel für die Differenz der auf der linken Seite stehenden beiden Producte her, indem man w um π vermehrt, wodurch an die Stelle von $\vartheta_3(w)$, $\vartheta_2(w)$ respective $\vartheta_3(w+\pi)=\vartheta_3(w)$, $\vartheta_2(w+\pi)=-\vartheta_2(w)$ tritt. Gleichzeitig vermehrt sich jede der Gröfsen w', x', y', z' um $\frac{1}{2}\pi$, wodurch (Gl. (2.)) jedes ϑ_3 in ϑ und jedes ϑ_2 in $-\vartheta_1$ übergeht. Daher ergiebt sich:

$$\text{(11*.)}\quad \begin{aligned}&\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)-\vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_2(z)\\ &=\vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta(y')\vartheta(z')+\vartheta_1(w')\vartheta_1(x')\vartheta_1(y')\vartheta_1(z').\end{aligned}$$

Indem man die Summe der Gleichungen (11.), (11*.) bildet, erhält man das Product $\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)$ durch vier Producte von ϑ-Functionen ausgedrückt, deren Argumente w', x', y', z' sind. Von dem einen Product $\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)$ aus kann man zu allen möglichen Producten von vier ϑ-Functionen übergehen, indem man jedes der Argumente um eine der vier Gröfsen 0, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\lg q.i$, $\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\lg q.i$ vermehrt. Die Anzahl der Formeln, die man auf diese Weise erhalten kann, beträgt 35, aber dieselben zerfallen in zwei wesentlich verschiedene Kategorien. Aus den an w, x, y, z angebrachten Aenderungen gehen nämlich für w', x', y', z' entweder Aenderungen hervor, welche sich aus Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\lg q.i$ zusammen setzen lassen, oder Aenderungen, zu welchen ungrade Vielfache von $\frac{1}{4}\pi$ oder von $\frac{1}{4}\lg q.i$ gehören. Nur im ersten Fall lassen sich die Argumente der auf der rechten Seite der Gleichung stehenden ϑ-Functionen auf w', x', y', z' zurückführen, während dieselben im zweiten Fall von diesen Werthen immer um $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{4}\lg q.i$, $\frac{1}{4}\pi\pm\frac{1}{4}\lg q.i$ abweichen. Nach dieser Eintheilung gehören in die erste Kategorie nur 11 Formeln. Die übrigen 24 Formeln führen auf Resultate, die zwar auf anderem Wege schwierig zu beweisen, aber für den vorliegenden Zweck nicht nothwendig sind. Ich beschränke mich daher auf die 11 Formeln der ersten Kategorie, aus denen, nachdem alle Reductionen daran angebracht sind, die folgenden Gleichungen hervorgehn:

(A.)

$$(1.)\ \vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)+\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)=\vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z')+\vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z')$$

$$(2.)\ \vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)-\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)=\vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta(y')\vartheta(z')+\vartheta_1(w')\vartheta_1(x')\vartheta_1(y')\vartheta_1(z'$$

$$(3.)\ \vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z)+\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)=\vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z')-\vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z')$$

$$(4.)\ \vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z)-\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)=\vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta(y')\vartheta(z')-\vartheta_1(w')\vartheta_1(x')\vartheta_1(y')\vartheta_1(z')$$

$$(5.)\ \vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)+\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)=\vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z')+\vartheta_1(w')\vartheta_1(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z')$$

$$(6.)\ \vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)-\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)=\vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta(y')\vartheta(z')+\vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_1(y')\vartheta_1(z')$$

$$(7.)\ \vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)+\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)=\vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z')+\vartheta_1(w')\vartheta_1(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z')$$

$$(8.)\ \vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)-\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)=\vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta(y')\vartheta(z')+\vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta_1(y')\vartheta_1(z')$$

$$(9.)\ \vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)+\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)=\vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z')+\vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta_1(y')\vartheta_1(z')$$

$$(10.)\ \vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)-\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)=\vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z')+\vartheta_1(w')\vartheta_1(x')\vartheta(y')\vartheta(z')$$

$$(11.)\ \vartheta_3(w)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta_1(z)+\vartheta_2(w)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta(z)=\vartheta_1(w')\vartheta(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z')-\vartheta(w')\vartheta_1(x')\vartheta_3(y')\vartheta_2(z')$$

$$(12.)\ \vartheta_3(w)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta_1(z)-\vartheta_2(w)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta(z)=\vartheta_3(w')\vartheta_2(x')\vartheta(y')\vartheta_1(z')-\vartheta_2(w')\vartheta_3(x')\vartheta_1(y')\vartheta(z'),$$

worin wie oben (Gl. (10.))

$$\begin{aligned} w' &= \tfrac{1}{2}(w+x+y+z) & \qquad w &= \tfrac{1}{2}(w'+x'+y'+z') \\ x' &= \tfrac{1}{2}(w+x-y-z) & x &= \tfrac{1}{2}(w'+x'-y'-z') \\ y' &= \tfrac{1}{2}(w-x+y-z) & y &= \tfrac{1}{2}(w'-x'+y'-z') \\ z' &= \tfrac{1}{2}(w-x-y+z) & z &= \tfrac{1}{2}(w'-x'-y'+z'). \end{aligned}$$

Die beiden letzten der Gleichungen (A.) sind nur für eine zu rechnen, denn die Ausdrücke von $\vartheta_3(w(\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta_1(z)$, $\vartheta_2(w)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta(z)$, aus denen sie sich ergeben, gehen in einander über, wenn man x, w, z, y für w, x, y, z setzt.

Uebrigens ist noch zu bemerken, dass die Gleichungen:

(5.), (7.), (9.), (11.)

in die Gleichungen

(6.), (8.), (10.), (12.)

übergehen, so wie diese in jene, wenn man

$$-x,\ -y \text{ resp. für } x,\ y$$

setzt, wodurch zugleich w' mit z' und x' mit y' vertauscht werden.

3.

Die Formeln (A.) des vorigen §. lassen sich auf vielfache Art specialisiren, indem man zwischen den vier von einander unabhängigen Variabeln w, x, y, z Relationen stattfinden läſst. Indem ich eine vollständigere Entwickelung der Formeln dieser Art für den Schluſs dieser Abhandlung vorbehalte, werde ich mich jetzt auf die für den vorliegenden Zweck nothwendigen beschränken.

Man setze

$$w = \pm(x+y+z),$$

was die Anzahl der von einander unabhängigen Variabeln auf drei reducirt, so ergeben die Gleichungen (10.) für w', x', y', z' im Fall des oberen Zeichens:

$$w' = x+y+z, \qquad x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = z,$$

so dass beide Systeme von Variabeln w, x, y, z und w', x', y', z' in dieselben Werthe zusammenfallen, dagegen im Fall des unteren Zeichens:

$$w' = 0, \qquad x' = -(y+z), \qquad y' = -(x+z), \qquad z' = -(x+y).$$

Von den unter diesen beiden Hypothesen aus den Formeln (A.) hervorgehenden Resultaten lassen sich die interessantesten in folgende fünf Doppelgleichungen zusammenfassen:

(B.)

$$(1.)\ \vartheta(0)\vartheta(y+z)\vartheta(x+z)\vartheta(x+y) = \vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta_2(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)$$
$$= \vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_1(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)$$

$$(2.)\ \vartheta(0)\vartheta(y+z)\vartheta_3(x+z)\vartheta_3(x+y) = \vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta_1(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)$$
$$= \vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_2(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)$$

$$(3.)\ \vartheta(0)\vartheta(y+z)\vartheta_2(x+z)\vartheta_2(x+y) = \vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta_1(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)$$
$$= \vartheta_2(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)$$

$$(4.)\ \vartheta(0)\vartheta(y+z)\vartheta_1(x+z)\vartheta_1(x+y) = \vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta_2(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)$$
$$= \vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) + \vartheta_1(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta(y)\vartheta(z)$$

$$(5.)\ \vartheta(0)\vartheta_1(y+z)\vartheta_2(x+z)\vartheta_3(x+y) = \vartheta_3(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)\vartheta(z) + \vartheta_2(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta(y)\vartheta_1(z)$$
$$= \vartheta_1(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_2(z) - \vartheta(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_3(z).$$

Ein zweites specielleres Formelsystem, welches nur noch zwei von einander unabhängige Variable enthält, ergiebt sich aus (A.), wenn man

$$w = \pm x, \qquad y = \pm z$$

setzt, wo beidemal das obere oder beidemal das untere Vorzeichen zu nehmen ist. Die hieraus folgenden Werthe von w', x', y', z' sind nach (10.) für die oberen Vorzeichen:

$$w' = x+y, \quad x' = x-y, \quad y' = 0, \quad z' = 0,$$

für die unteren Vorzeichen:

$$w' = 0, \quad x' = 0, \quad y' = -(x-y), \quad z' = -(x+y).$$

Ebenso kann man den Variabeln folgende vier den Gleichungen (10.) genügende Werthsysteme geben:

$$\begin{array}{llllll}
w = y, & x = z, & w' = x+y, & x' = 0, & y' = -(x-y), & z' = 0,\\
w = -y, & x = -z, & w' = 0, & x' = x-y, & y' = 0, & z' = -(x+y),\\
w = z, & x = y, & w' = y+z, & x' = 0, & y' = 0, & z' = -(y-z),\\
w = -z, & x = -y, & w' = 0, & x' = -(y+z), & y' = y-z, & z' = 0.
\end{array}$$

Die aus diesen Hypothesen hervorgehenden Formeln, welche das Product aus einer ϑ-Function mit dem Argument $x+y$ und aus einer ϑ-Function mit dem Argument $x-y$ durch ϑ-Functionen mit den Argumenten x und y darstellen, sind ihrer Wichtigkeit wegen in dem folgenden System von 18 Gleichungen vollständig zusammengestellt.

(C.)

$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_3(x+y)\,\vartheta_3(x-y) = \vartheta_3^2(x)\,\vartheta_3^2(y)+\vartheta_1^2(x)\,\vartheta_1^2(y) = \vartheta^2(x)\,\vartheta^2(y)+\vartheta_2^2(x)\,\vartheta_2^2(y) \tag{1.}$$

$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta(x+y)\,\vartheta(x-y) = \vartheta^2(x)\,\vartheta_3^2(y)+\vartheta_2^2(x)\,\vartheta_1^2(y) = \vartheta_3^2(x)\,\vartheta^2(y)+\vartheta_1^2(x)\,\vartheta_2^2(y) \tag{2.}$$

$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_2(x+y)\,\vartheta_2(x-y) = \vartheta_2^2(x)\,\vartheta_3^2(y)-\vartheta^2(x)\,\vartheta_1^2(y) = \vartheta_3^2(x)\,\vartheta_2^2(y)-\vartheta_1^2(x)\,\vartheta^2(y) \tag{3.}$$

$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_1(x+y)\,\vartheta_1(x-y) = \vartheta_1^2(x)\,\vartheta_3^2(y)-\vartheta_3^2(x)\,\vartheta_1^2(y) = \vartheta^2(x)\,\vartheta_2^2(y)-\vartheta_2^2(x)\,\vartheta^2(y) \tag{4.}$$

$$\vartheta^2(0)\,\vartheta_3(x+y)\,\vartheta_3(x-y) = \vartheta^2(x)\,\vartheta_3^2(y)-\vartheta_1^2(x)\,\vartheta_2^2(y) = \vartheta_3^2(x)\,\vartheta^2(y)-\vartheta_2^2(x)\,\vartheta_1^2(y) \tag{5.}$$

$$\vartheta^2(0)\,\vartheta(x+y)\,\vartheta(x-y) = \vartheta_3^2(x)\,\vartheta_3^2(y)-\vartheta_2^2(x)\,\vartheta_2^2(y) = \vartheta^2(x)\,\vartheta^2(y)-\vartheta_1^2(x)\,\vartheta_1^2(y) \tag{6.}$$

$$\vartheta^2(0)\,\vartheta_2(x+y)\,\vartheta_2(x-y) = \vartheta^2(x)\,\vartheta_2^2(y)-\vartheta_1^2(x)\,\vartheta_3^2(y) = \vartheta_2^2(x)\,\vartheta^2(y)-\vartheta_3^2(x)\,\vartheta_1^2(y) \tag{7.}$$

$$\vartheta^2(0)\,\vartheta_1(x+y)\,\vartheta_1(x-y) = \vartheta_3^2(x)\,\vartheta_2^2(y)-\vartheta_2^2(x)\,\vartheta_3^2(y) = \vartheta_1^2(x)\,\vartheta^2(y)-\vartheta^2(x)\,\vartheta_1^2(y) \tag{8.}$$

$$\vartheta_2^2(0)\,\vartheta_3(x+y)\,\vartheta_3(x-y) = \vartheta_3^2(x)\,\vartheta_2^2(y)+\vartheta^2(x)\,\vartheta_1^2(y) = \vartheta_2^2(x)\,\vartheta_3^2(y)+\vartheta_1^2(x)\,\vartheta^2(y) \tag{9.}$$

$$\vartheta_2^2(0)\,\vartheta(x+y)\,\vartheta(x-y) = \vartheta^2(x)\,\vartheta_2^2(y)+\vartheta_3^2(x)\,\vartheta_1^2(y) = \vartheta_1^2(x)\,\vartheta_3^2(y)+\vartheta_2^2(x)\,\vartheta^2(y) \tag{10.}$$

$$\vartheta_2^2(0)\,\vartheta_2(x+y)\,\vartheta_2(x-y) = \vartheta_2^2(x)\,\vartheta_2^2(y)-\vartheta_1^2(x)\,\vartheta_1^2(y) = \vartheta_3^2(x)\,\vartheta_3^2(y)-\vartheta^2(x)\,\vartheta^2(y) \tag{11.}$$

$$\vartheta_2^2(0)\,\vartheta_1(x+y)\,\vartheta_1(x-y) = \vartheta_1^2(x)\,\vartheta_2^2(y)-\vartheta_2^2(x)\,\vartheta_1^2(y) = \vartheta^2(x)\,\vartheta_3^2(y)-\vartheta_3^2(x)\,\vartheta^2(y) \tag{12.}$$

$$\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta(x\pm y)\,\vartheta_2(x\mp y) = \vartheta(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta_2(y)\pm\vartheta_1(x)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta_3(y) \tag{13.}$$

$$\vartheta_3(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(x\pm y)\,\vartheta_2(x\mp y) = \vartheta_3(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_2(y)\pm\vartheta(x)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta_1(y) \tag{14.}$$

$$\vartheta(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta(x\pm y)\,\vartheta_3(x\mp y) = \vartheta(x)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta_3(y)\pm\vartheta_1(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta_2(y) \tag{15.}$$

$$\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_1(x\pm y)\,\vartheta_3(x\mp y) = \vartheta_1(x)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta_2(y)\pm\vartheta(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta_3(y) \tag{16.}$$

$$\vartheta_3(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_1(x\pm y)\,\vartheta(x\mp y) = \vartheta(x)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_2(y)\pm\vartheta_3(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta_1(y) \tag{17.}$$

$$\vartheta(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_1(x\pm y)\,\vartheta_2(x\mp y) = \vartheta_1(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta_3(y)\pm\vartheta(x)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta_2(y). \tag{18.}$$

Setzt man in diesen Formeln $x=y$, so erhält man die ϑ-Functionen des doppelten Arguments durch ϑ-Functionen des einfachen Arguments ausgedrückt. So ergeben zum Beispiel die 1te, 2te, 11te der Formeln (C.) die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{ll} \vartheta_3^3(0)\,\vartheta_3(2x) & = \vartheta_3^4(x)+\vartheta_1^4(x) = \vartheta^4(x)+\vartheta_2^4(x) \\ \vartheta_3^2(0)\,\vartheta(0)\,\vartheta(2x) & = \vartheta^2(x)\,\vartheta_3^2(x)+\vartheta_1^2(x)\,\vartheta_2^2(x) \\ \vartheta_2^3(0)\,\vartheta_2(2x) & = \vartheta_2^4(x)-\vartheta_1^4(x) = \vartheta_3^4(x)-\vartheta^4(x). \end{array}\right\} \tag{12.}$$

Die erste Gleichung (12.) drückt $\vartheta_3(x)$, mit der Constante $\vartheta_3^3(0)$ multiplicirt, als Summe vierter Potenzen von Functionen des halben Arguments aus. Für reelle Werthe von x und q zeigt sie daher, dass $\vartheta_3(x)$ (und daher auch $\vartheta(x)$) immer positive Werthe hat, und zwar mit Ausschlufs der Null, denn sollte $\vartheta_3(x)$ verschwinden, so müfste auch $\vartheta_3(\frac{1}{2}x)$, folglich auch $\vartheta_3(\frac{1}{4}x)$ u. s. w., also endlich $\vartheta_3(0)$ verschwinden, was nicht der Fall ist.

Wichtiger als die unter der Hypothese $x = y$ aus (C.) hervorgehenden Formeln sind diejenigen, welche man aus denselben für $y = 0$ erhält. Es sind die folgenden vier:

(D.)

$$(1.)\quad \vartheta_3^2(0)\vartheta_3^2(x) = \vartheta^2(0)\vartheta^2(x)+\vartheta_2^2(0)\vartheta_2^2(x)$$

$$(2.)\quad \vartheta_3^2(0)\vartheta^2(x) = \vartheta^2(0)\vartheta_3^2(x)+\vartheta_2^2(0)\vartheta_1^2(x)$$

$$(3.)\quad \vartheta_3^2(0)\vartheta_2^2(x) = \vartheta_2^2(0)\vartheta_3^2(x)-\vartheta^2(0)\vartheta_1^2(x)$$

$$(4.)\quad \vartheta_3^2(0)\vartheta_1^2(x) = \vartheta_2^2(0)\vartheta^2(x)-\vartheta^2(0)\vartheta_2^2(x).$$

Setzt man überdies noch $x = 0$, so giebt die 1[te] der Gleichungen (D.) zwischen $\vartheta_3(0)$, $\vartheta(0)$, $\vartheta_2(0)$ die merkwürdige Relation

$$(E.)\quad \vartheta_3^4(0) = \vartheta^4(0)+\vartheta_2^4(0)$$

d. h.

$$[1+2q+2q^4+2q^9+\cdots]^4 = [1-2q+2q^4-2q^9+\cdots]^4+16q[1+q^{1.2}+q^{2.3}+\cdots]^4.$$

Setzt man

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}, \qquad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)},$$

so besteht nach (E.) zwischen k und k' die Relation

$$k^2+k'^2 = 1.$$

Die Gleichungen (D.) zeigen, dass, wenn man drei der Functionen $\vartheta(x)$, $\vartheta_1(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta_3(x)$ durch die vierte dividirt, von den so entstehenden Brüchen zwei durch den dritten vermittelst Ausziehung von Quadratwurzeln bestimmbar sind. So ergiebt sich:

$$\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_2(0)}\cdot\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{1-\left(\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\cdot\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\right)^2}$$

$$\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)}\cdot\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{1-\left(\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\cdot\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\right)^2},$$

was sich eleganter so ausdrücken läſst: *man kann einen Winkel* φ *dergestalt bestimmen, dass gleichzeitig*

$$\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\sin\varphi, \qquad \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta(0)}\cos\varphi, \qquad \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta(0)}\sqrt{1-\left(\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\right)^4\sin^2\varphi},$$

welche Gleichungen unter Einführung der oben definirten Gröfsen k, k' und der Legendreschen Bezeichnung

$$\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$

die Gestalt

$$\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{k}\sin\varphi, \qquad \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\varphi, \qquad \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\varphi$$

annehmen.

Die aus den Formeln (D.), (E.) gezogenen Resultate lassen sich daher in folgenden Gleichungen zusammenstellen:

$$(13.)\quad \begin{cases} \sqrt{k} = \dfrac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \dfrac{2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots} \\ \sqrt{k'} = \dfrac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)} = \dfrac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots} \\ k^2+k'^2 = 1 \end{cases}$$

$$(14.)\quad \begin{cases} \sqrt{k}\sin\varphi = \dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \dfrac{2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots} \\ \sqrt{\dfrac{k}{k'}}\cos\varphi = \dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \dfrac{2\sqrt[4]{q}\cos x+2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots} \\ \dfrac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\varphi = \dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \dfrac{1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots} \end{cases}$$

Durch die Gleichungen (14.) wird der Winkel φ selbst nicht vollständig bestimmt, sondern nur die trigonometrischen Functionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta\varphi$ desselben, welche bei Aenderung von φ um 2π ungeändert bleiben. Daher giebt *ein* Werth von φ, welcher den Gleichungen (14.) genügt, alle übrigen, wenn man ihn um alle möglichen Vielfachen von 2π vermehrt oder vermindert. Hieraus folgt, dass wenn die Forderung hinzugefügt wird, *φ sei eine continuirliche Function von x,* man nur für *einen* Werth von x das zugehörige φ festgesetzt zu haben braucht, um für alle Werthe von x die Vieldeutigkeit der Bestimmung von φ zu heben. Da für $x = 0$ nach (14.) $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$ wird, so ist es am einfachsten, für $x = 0$ auch $\varphi = 0$ anzunehmen. Man setze also fest, *dass φ mit x zugleich verschwinde,* so ist φ durch die Gleichungen (14.) und die hinzugefügten Nebenbedingungen vollständig bestimmt.

Man nehme insbesondere an, x *und* q (dessen Modul immer <1 vorausgesetzt wird) *seien beide reell*, so werden nach (13.) auch k, k' reell und <1, ebenso wird nach (14.) φ reell, und da nach (12.) für reelle Werthe von x und q die Functionen $\vartheta_3(x)$, $\vartheta(x)$ ausschliefslich positive Werthe haben, so ist in der dritten Gleichung (14.) die Quadratwurzel $\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ stets mit positivem Zeichen zu nehmen.

Nachdem die Formeln (D.), (E.) den in den Gleichungen (13.), (14.) dargestellten Zusammenhang zwischen den drei Functionen $\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}, \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}, \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}$ ergeben haben, werden die Formeln (C.) zu der Fundamental-Eigenschaft dieser Functionen führen, zu der Eigenschaft, *dass die Function der Summe zweier Argumente sich algebraisch durch die Functionen der einzelnen Argumente ausdrücken läfst.*

Man dividire die drei Formeln (C. 13, 15, 17) durch (C. 6), so ergeben sich folgende drei Gleichungen:

$$(15.)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)}{\vartheta(0)\vartheta(0)}\cdot\dfrac{\vartheta_1(x\pm y)}{\vartheta(x\pm y)} = \dfrac{\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\cdot\dfrac{\vartheta_2(y)}{\vartheta(y)}\dfrac{\vartheta_3(y)}{\vartheta(y)} \pm \dfrac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\cdot\dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}}{1-\dfrac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}\cdot\dfrac{\vartheta_1^2(y)}{\vartheta^2(y)}} \\[2ex] \dfrac{\vartheta_2(0)}{\vartheta(0)}\cdot\dfrac{\vartheta_2(x\pm y)}{\vartheta(x\pm y)} = \dfrac{\dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\cdot\dfrac{\vartheta_2(y)}{\vartheta(y)} \mp \dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\cdot\dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_3(y)}{\vartheta(y)}}{1-\dfrac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}\dfrac{\vartheta_1^2(y)}{\vartheta^2(y)}} \\[2ex] \dfrac{\vartheta_3(0)}{\vartheta(0)}\cdot\dfrac{\vartheta_3(x\pm y)}{\vartheta(x\pm y)} = \dfrac{\dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}\cdot\dfrac{\vartheta_3(y)}{\vartheta(y)} \mp \dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\cdot\dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_2(y)}{\vartheta(y)}}{1-\dfrac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}\cdot\dfrac{\vartheta_1^2(y)}{\vartheta^2(y)}}. \end{cases}$$

Da von den drei Brüchen $\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}, \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}, \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}$ je zwei mit Hülfe von Quadratwurzeln durch den dritten darstellbar sind, so hat nach (15.) jede der drei Functionen $\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}, \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}, \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}$ die obengenannte Fundamental-Eigenschaft.

Die Gleichungen (15.) werden die für die Functionen $\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}, \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}, \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}$ geltenden Formeln der Addition genannt.

Man führe nach (13.) die Gröſsen k, k' ein und nach (14.) den von x abhangenden Winkel φ, ferner seien ψ, σ die Winkel, welche resp. von y, $x+y$ ebenso abhängen wie φ von x, sodass

$$(16.)\quad \begin{cases} \sqrt{k}\sin\varphi = \dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} & \sqrt{k}\sin\psi = \dfrac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)} & \sqrt{k}\sin\sigma = \dfrac{\vartheta_1(x+y)}{\vartheta(x+y)} \\ \sqrt{\dfrac{k}{k'}}\cos\varphi = \dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} & \sqrt{\dfrac{k}{k'}}\cos\psi = \dfrac{\vartheta_2(y)}{\vartheta(y)} & \sqrt{\dfrac{k}{k'}}\cos\sigma = \dfrac{\vartheta_2(x+y)}{\vartheta(x+y)} \\ \dfrac{1}{\sqrt{k'}}\,\Delta\varphi = \dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} & \dfrac{1}{\sqrt{k'}}\,\Delta\psi = \dfrac{\vartheta_3(y)}{\vartheta(y)} & \dfrac{1}{\sqrt{k'}}\,\Delta\sigma = \dfrac{\vartheta_3(x+y)}{\vartheta(x+y)}, \end{cases}$$

dann erhalten die Gleichungen (15.), mit dem oberen Zeichen genommen, folgende elegante Form:

$$(17.)\quad \begin{cases} \sin\sigma = \dfrac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi} \\ \cos\sigma = \dfrac{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta\varphi\,\Delta\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi} \\ \Delta\sigma = \dfrac{\Delta\varphi\,\Delta\psi - k^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}, \end{cases}$$

Formeln, von welchen die beiden ersten für $k = 0$ in die Additionsformeln der Trigonometrie übergehen. Ein reichhaltiges, den Gleichungen (17.) ähnliches System von Formeln läſst sich aus den Formeln (C.) ableiten, wobei ich indessen nicht verweile, da bereits im § 18 der ***Fundamenta*** eine Sammlung von Formeln dieser Art mit groſser Vollständigkeit gegeben ist.

Wenn für eine Function ein Additionstheorem im Sinne der Gleichungen (15.) besteht, so läſst sich der Differentialquotient der Function algebraisch durch die Function ausdrücken.

Man differentiire die Gleichungen (15.) nach y, setze nach der Differentiation $y = 0$ und bezeichne mit $\vartheta_1'(0)$ den Werth von $\frac{d\vartheta_1(x)}{dx}$ für $x = 0$, dann erhält man:

$$(18.)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \dfrac{\vartheta(0)\vartheta_1'(0)}{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)}\cdot\dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} \\ \dfrac{d}{dx}\dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = -\dfrac{\vartheta_3(0)\vartheta_1'(0)}{\vartheta(0)\vartheta_2(0)}\cdot\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} \\ \dfrac{d}{dx}\dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = -\dfrac{\vartheta_2(0)\vartheta_1'(0)}{\vartheta(0)\vartheta_3(0)}\cdot\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}. \end{cases}$$

Führt man nach (14.) den Winkel φ ein, so geben die drei Gleichungen (18.) übereinstimmend:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\vartheta_3(0)\vartheta_1'(0)}{\vartheta(0)\vartheta_2(0)}\cdot\Delta\varphi,$$

$$\frac{\vartheta_3(0)\vartheta'(0)}{\vartheta(0)\vartheta_2(0)}\,dx = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

wo, für reelle Werthe von φ und k, $\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ den positiven Werth der Quadratwurzel bedeutet. Integrirt man und berücksichtigt, dass x und φ gleichzeitig verschwinden, so ergiebt sich:

$$(19.)\quad \frac{\vartheta_3(0)\vartheta_1'(0)}{\vartheta(0)\vartheta_2(0)}\cdot x = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Die rechte Seite von Gleichung (19.) ist bekanntlich das elliptische Integral erster Gattung, φ die Amplitude, k der Modul, k' der Complementarmodul.

Der constante Factor

$$\frac{\vartheta_3(0)\vartheta_1'(0)}{\vartheta(0)\vartheta_2(0)},$$

mit welchem x multiplicirt dem Integral erster Gattung gleich wird, läſst sich noch vereinfachen, wie im folgenden Paragraphen gezeigt werden soll.'

4.

Der bloſse Hinblick auf die Definitionsgleichungen

$$\vartheta_3(x) = 1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots$$
$$\vartheta(x) = 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots$$

und

$$\vartheta_2(x) = 2\sqrt[4]{q}\cos x+2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x+\cdots$$

der Functionen ϑ_3, ϑ und ϑ_2 zeigt, dass, wenn man in den Functionen ϑ_3 und ϑ

die graden Glieder von den ungraden trennt, jede dieser Summen für sich wieder eine ϑ-Function ist, in welcher indessen x und q durch $2x$ und q^4 ersetzt sind, und zwar ist die Summe der graden Glieder gleich $\vartheta_3(2x, q^4)$, die Summe der ungraden Glieder gleich $\vartheta_2(2x, q^4)$. Man hat also die beiden identischen Gleichungen:

$$(20.)\qquad \begin{cases} \vartheta_3(x,q) = \vartheta_3(2x,q^4)+\vartheta_2(2x,q^4) \\ \vartheta(x,q) = \vartheta_3(2x,q^4)-\vartheta_2(2x,q^4). \end{cases}$$

Diese Werthe von ϑ_3, ϑ, in die dritte Gleichung (12.)

$$\vartheta_2^3(0)\cdot\vartheta_2(2x) = \vartheta_3^4(x)-\vartheta^4(x)$$

eingesetzt, führen, wenn man zugleich x für $2x$ schreibt, zu der Gleichung:

$$(21.)\qquad \vartheta_2^3(0,q)\,\vartheta_2(x,q) = 8\vartheta_2(x,q^4)\,\vartheta_3(x,q^4)[\vartheta_3^2(x,q^4)+\vartheta_2^2(x,q^4)],$$

aus welcher, wenn man x um $\frac{\pi}{2}$ vermehrt, eine ähnliche Gleichung für die Function ϑ_1:

$$(21^*.)\qquad \vartheta_2^3(0,q)\,\vartheta_1(x,q) = 8\vartheta_1(x,q^4)\,\vartheta(x,q^4)[\vartheta^2(x,q^4)+\vartheta_1^2(x,q^4)]$$

hervorgeht. Die letzte Gleichung giebt, wenn man sie nach x differentiirt und dann $x=0$ setzt:

$$(22.)\qquad \vartheta_2^3(0,q)\,\vartheta_1'(0,q) = 8\vartheta^3(0,q^4)\,\vartheta_1'(0,q^4).$$

Andrerseits ergeben die Gleichungen (20.), (21.) für $x=0$:

$$\begin{aligned} \vartheta_3(0,q) &= \vartheta_3(0,q^4)+\vartheta_2(0,q^4) \\ \vartheta(0,q) &= \vartheta_3(0,q^4)-\vartheta_2(0,q^4) \\ \vartheta_2^4(0,q) &= 8\vartheta_2(0,q^4)\,\vartheta_3(0,q^4)[\vartheta_3^2(0,q^4)+\vartheta_2^2(0,q^4)], \end{aligned}$$

also, wenn man das Product aus den letzten drei Formeln bildet und dabei die Relation (E.)

$$\vartheta_3^4(0,q^4)-\vartheta_2^4(0,q^4) = \vartheta^4(0,q^4)$$

anwendet:

$$(22^*.)\qquad \vartheta_2^4(0,q)\,\vartheta_3(0,q)\,\vartheta(0,q) = 8\vartheta^4(0,q^4)\,\vartheta_2(0,q^4)\,\vartheta_3(0,q^4).$$

Man dividire beide Seiten der Gleichungen (22.), (22*.) durch einander, so ergiebt sich:

$$\frac{\vartheta_1'(0,q)}{\vartheta(0,q)\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_3(0,q)} = \frac{\vartheta_1'(0,q^4)}{\vartheta(0,q^4)\,\vartheta_2(0,q^4)\,\vartheta_3(0,q^4)};$$

d. h. die Function

$$\xi(q) = \frac{\vartheta_1'(0,q)}{\vartheta(0,q)\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_3(0,q)}$$

hat die Eigenschaft, unverändert zu bleiben, wenn man q^4 für q setzt.

Indem man dies Resultat wiederholt anwendet und berücksichtigt, dass, da der Modul von q kleiner als 1 ist, q^n für $n=\infty$ zur Grenze Null hat, ergiebt sich:

$$\xi(q) = \xi(0).$$

Aber für $q=0$ ist, wie leicht einzusehen, die Function ξ der Einheit gleich, daher für jeden Werth von q:

$$\xi(q) = 1$$

oder

$$(23.)\qquad \vartheta_1'(0,q) = \vartheta(0,q)\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_3(0,q).$$

Diese wichtige Relation reducirt den constanten Factor, mit welchem x in Gleichung (19.) multiplicirt ist, auf $\vartheta_3^2(0)$, sodass diese Gleichung jetzt in die folgende übergeht:

$$(19^*.)\qquad \vartheta_3^2(0).x = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

5.

Während x dem unbestimmten elliptischen Integral erster Gattung proportional ist, hängt der constante Factor, um welchen sich x davon unterscheidet, von dem vollständigen Integral (intégrale complète) ab, d. h. von dem innerhalb solcher Grenzen genommenen Integral, dass die unter demselben stehende Function $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ alle Werthe bekommt, deren sie für reelle Werthe von φ fähig ist, was der Fall ist, sobald die Grenzen um $\frac{1}{2}\pi$ von einander verschieden sind. Es soll aber, während bisher q ebensowohl imaginär als reell sein konnte, wenn nur sein Modul <1 war, von jetzt an die Untersuchung auf reelle Werthe von q beschränkt werden.

Da für $x=\frac{\pi}{2}$ die Brüche $\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}$ und $\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}$ die Werthe $\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \sqrt{k}$

und 0 bekommen, so geht aus den Gleichungen (14.)

$$\sqrt{k}\sin\varphi = \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}, \qquad \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\varphi = \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}$$

hervor, dass für $x = \frac{\pi}{2}$

$$\sin\varphi = 1, \qquad \cos\varphi = 0$$

werden. Daher wird φ gleich $\frac{\pi}{2}$ oder von diesem Werthe um ein ganzes Vielfaches von 2π verschieden, also

$$\varphi = (4n+1)\frac{\pi}{2},$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet. Es läſst sich aber leicht beweisen, dass $n = 0$ ist.

Man setze in (21.) $x = 0$ und bilde den Quotienten aus beiden Gleichungen, so ergiebt sich:

$$\frac{\vartheta_2(x,q)}{\vartheta_2(0,q)} = \frac{\vartheta_2(x,q^4)}{\vartheta_2(0,q^4)}\cdot\rho,$$

wo der Ausdruck

$$\rho = \frac{\vartheta_3(x,q^4)}{\vartheta_3(0,q^4)}\cdot\frac{\vartheta_3^2(x,q^4)+\vartheta_2^2(x,q^4)}{\vartheta_3^2(0,q^4)+\vartheta_2^2(0,q^4)}$$

ein für alle reellen Werthe von x und q positiver Factor ist. Die Function

$$\frac{\vartheta_2(x,q)}{\vartheta_2(0,q)}$$

behält also ihr Zeichen, wenn man q durch q^4 ersetzt. Durch fortgesetzte Anwendung hiervon, und indem man berücksichtigt, dass sich q^m mit steigendem m immer mehr der Null nähert, gelangt man zu dem Ergebniss, dass die obige Function gleiches Zeichen mit

$$\frac{\vartheta_2(x,\delta)}{\vartheta_2(0,\delta)}$$

hat, wo δ unendlich klein ist. Aber für ein unendlich kleines δ nähert sich dieser Bruch der Grenze $\cos x$, *folglich hat, für alle reellen Werthe von* x *und* q, $\vartheta_2(x)$ *das Zeichen von* $\cos x$.

Bei Vertauschung von x mit $\frac{\pi}{2}-x$ geht $\vartheta_2(x)$ in $\vartheta_1(x)$ und $\cos x$ in $\sin x$ über, daher ist in dem obigen gleichzeitig das Ergebniss enthalten, *dass* $\vartheta_1(x)$ *das Zeichen von* $\sin x$ *hat.*

Da ferner $\vartheta(x)$ für reelle Werthe von x und q immer positiv ist, so schliefst man aus den beiden Gleichungen:

$$\sqrt{k}\sin\varphi = \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}, \qquad \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\varphi = \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)},$$

dass $\sin\varphi$ das Zeichen von $\sin x$ und $\cos\varphi$ das Zeichen von $\cos x$ hat, oder, was, da φ mit x zugleich verschwindet, dasselbe ist: *φ liegt mit x immer in demselben Quadranten*, wird also mit x gleichzeitig $= \frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$ etc.

Man kann also in (19*.) x und φ gleichzeitig $= \frac{\pi}{2}$ setzen und erhält

$$\vartheta_3^2(0)\cdot\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Wenn man, wie in den *Fundamenten*, das vollständige Integral mit K bezeichnet, so hat man nach der eben bewiesenen Gleichung:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}[1+2q+2q^4+2q^9+\cdots]^2,$$

was in Verbindung mit (13.) die drei Gleichungen

$$\vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}, \qquad \vartheta_2(0) = \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}, \qquad \vartheta(0) = \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}}$$

liefert. — Man kann jetzt x als Function von φ, k bestimmen, *ohne q dabei zu gebrauchen.* Bezeichnet man mit Legendre durch $F(\varphi)$ das unbestimmte elliptische Integral erster Gattung, so hat man nämlich

$$x = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{F(\varphi)}{K}.$$

Die bisher gewonnenen Resultate lassen sich folgendermafsen zusammenfassen:

Die vier in § 1 definirten ϑ-Functionen erfüllen solche Relationen, dass man die Amplitude φ, den Modul k und den Complementarmodul k' als Functionen von x und q durch die sechs gleichzeitig bestehenden Gleichungen (13.), (14.):

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}$$

$$\sqrt{k'} = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}$$

$$k^2+k'^2 = 1$$

$$\sqrt{k}\sin\varphi = \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \frac{2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots}$$

$$\sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\varphi = \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \frac{2\sqrt[4]{q}\cos x+2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\varphi = \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \frac{1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots}$$

und die Bedingung, dass φ mit x zugleich verschwinde, definiren kann. Dann läſst sich aber umgekehrt x als Function von φ und k durch die Gleichungen

$$(24.)\qquad \frac{2Kx}{\pi} = F(\varphi) = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

darstellen, und man hat überdies:

$$(25.)\qquad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2K}{\pi}} = \vartheta_3(0) = 1+2q+2q^4+2q^9+\cdots \\ \sqrt{\dfrac{2Kk}{\pi}} = \vartheta_2(0) = 2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+\cdots \\ \sqrt{\dfrac{2Kk'}{\pi}} = \vartheta(0) = 1-2q+2q^4-2q^9+\cdots \end{cases}$$

Im Folgenden werde ich, wie in den *Fundamenten*, mit $\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$ die inverse Function von $F(\varphi)$ bezeichnen, sodass aus $\frac{2Kx}{\pi} = F(\varphi)$ umgekehrt $\varphi = \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$ folgt.

6.

Es bleibt jetzt noch die Aufgabe zu lösen, q als Function von k zu bestimmen.

Durch die Gleichungen (25.) sind K, k, k' als Functionen von q definirt. Man setze in denselben q^4 an die Stelle von q und bezeichne mit K_4, k_4, k'_4 die

Gröſsen, in welche alsdann K, k, k' übergehen. Dies vorausgesetzt, so gehen die für $x = 0$ in (20.) enthaltenen Gleichungen

$$\vartheta_3(0, q) = \vartheta_3(0, q^4) + \vartheta_2(0, q^4)$$
$$\vartheta(0, q) = \vartheta_3(0, q^4) - \vartheta_2(0, q^4)$$

unter Benutzung von (25.) in die folgenden über:

$$\sqrt{K} = (1+\sqrt{k_4})\sqrt{K_4}$$
$$\sqrt{Kk'} = (1-\sqrt{k_4})\sqrt{K_4},$$

aus welchen

$$\sqrt{k'} = \frac{1-\sqrt{k_4}}{1+\sqrt{k_4}}, \qquad \sqrt{k_4} = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}$$

hervorgeht. Das hierdurch gewonnene Resultat läſst sich auch so aussprechen:

Man bestimme aus dem Complementarmodul k' eines gegebenen Moduls k einen neuen Modul k_4 durch die Relation

$$\sqrt{k_4} = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}},$$

so stehen die zu den beiden Moduln k, k_4 gehörigen vollständigen Integrale K, K_4 in der einfachen durch die Gleichung

$$K = (1+\sqrt{k_4})^2 K_4$$

angegebenen Relation. Aber die zwischen k' und k_4 bestehende Beziehung ist eine reciproke. Hieraus folgt, dass wenn k_4' der gegebene Modul ist, dieselbe Operation, welche k_4 aus k entstehen läſst, von k_4' zu k' führt. Man hat daher die Gleichung

$$K_4' = (1+\sqrt{k'})^2 K'$$

oder

$$K' = \frac{1}{(1+\sqrt{k'})^2} K_4'.$$

Aus den beiden Relationen zwischen K und K_4 und zwischen K' und K_4' ergiebt sich:

$$\frac{K_4'}{K_4} = [(1+\sqrt{k'})(1+\sqrt{k_4})]^2 \frac{K'}{K}$$

oder, da

$$(1+\sqrt{k'})(1+\sqrt{k_4}) = 2$$

ist:

$$\frac{K_4'}{K_4} = 4\frac{K'}{K}.$$

Sieht man $\frac{K'}{K}$ als Function von q an, so hat diese Function also die durch die Gleichung

$$\text{funct}(q^4) = 4\,\text{funct}(q)$$

ausgedrückte Eigenschaft, eine Eigenschaft, welche sie mit dem Logarithmus gemein hat, da

$$\lg(q^4) = 4\lg q.$$

Bezeichnet man mit $\psi(q)$ den Quotienten aus beiden Functionen, setzt also

$$\psi(q) = \frac{K\lg q}{K'},$$

so hat daher $\psi(q)$ die Eigenschaft, unverändert zu bleiben, wenn man q^4 für q setzt, und hieraus folgt wiederum durch Wiederholung dieses Schlusses, und indem man $\psi(0)$ mit c bezeichnet:

$$\frac{K\lg q}{K'} = c. \tag{26.}$$

Um den Werth der Constante c zu ermitteln, betrachte man die Werthe von K und K' für unendlich kleine Werthe von q, für welche zugleich k^2 unendlich klein wird, und zwar so, dass

$$\operatorname*{Lim.}_{q=0} \frac{k^2}{16q} = 1$$

ist. In diesem Falle nähert sich K der Grenze $\frac{\pi}{2}$, dagegen wächst

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2\varphi}}$$

wegen der in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Elemente des Integrals ins Unendliche. Nach der erhaltenen Gleichung weiss man bereits, dass K' proportional $\lg q$ oder, was dasselbe ist, proportional $\lg\frac{k}{4}$ unendlich werden muss; aber es muss ermittelt werden, mit welcher numerischen Constante $\lg\frac{k}{4}$ zu multipliciren ist, damit für unendlich kleine Werthe von k das Verhältniss des Products zu K' der Einheit unendlich nahe komme. Indem man

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\sin\varphi} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\sin\varphi} - 1$$

in K' substituirt, ergiebt sich

$$\frac{1}{\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\frac{k^2}{1-\sin\varphi}-k^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\sin\varphi}\right)}}$$

oder, wenn man

$$\mu = \frac{1-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\sin\varphi}}{1+\frac{1}{2}\frac{k^2}{1-\sin\varphi}}$$

setzt:

$$\frac{1}{\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\frac{k^2}{1-\sin\varphi}}}\cdot(1-\mu k^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\frac{k^2}{1-\sin\varphi}}}\cdot\left\{1+\frac{1}{2}\mu k^2+\frac{1.3}{2.4}\mu^2k^4+\cdots\right\}.$$

Hier ist μ eine Gröfse, welche von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ immer kleiner als 1 bleibt, daher ergiebt sich:

$$K' = \left\{1+\frac{1}{2}\mu_1 k^2+\frac{1.3}{2.4}\mu_2 k^4+\cdots\right\}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{1+\frac{1}{2}\frac{k^2}{1-\sin\varphi}}},$$

wo $\mu_1, \mu_2 \ldots$ Factoren sind, welche zwischen 0 und 1 liegen. Das auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende bestimmte Integral findet man nach den gewöhnlichen Regeln der Integralrechnung

$$= -\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{4}k^2}}\lg\frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}k^2}-\sqrt{1+\frac{1}{4}k^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}k^2}+\sqrt{1+\frac{1}{4}k^2}},$$

welcher Ausdruck für unendlich kleine Werthe von k unendlich wenig von $\lg\frac{4}{k}$ und somit auch unendlich wenig von

$$-\tfrac{1}{2}\lg q$$

verschieden ist. Man hat daher

$$\lim_{q=0}.\frac{K\lg q}{K'} = -\pi.$$

Hieraus ergiebt sich

$$c = -\pi.$$

Die hier angewandte Analyse*), um K' für kleine Werthe von k in eine Reihe zu entwickeln, ist die nämliche, welche 1750 Euler im zweiten Theile

---

*) Eine andere Methode, um dasselbe Ziel zu erreichen, ist folgende: Indem man in das vollständige Integral K' für φ eine neue Variable

$$z = k \operatorname{tg} \varphi$$

einführt, erhält man

$$K' = \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(k^2+z^2)}}.$$

Es sei α eine Gröfse, welche mit k gleichzeitig unendlich klein wird, doch so dass $\frac{k}{\alpha}$ ebenfalls unendlich klein ist, was zum Beispiel stattfindet, wenn $\alpha = \sqrt{k}$ gesetzt wird. Dies vorausgesetzt, theile man das Integral in ein von 0 bis α und ein von α bis ∞ genommenes und bezeichne mit

$$\overset{b}{\underset{a}{M}} f(z)$$

einen zwischen dem gröfsten und kleinsten Werthe von $f(z)$ innerhalb der Grenzen $z = a$, $z = b$ liegenden Mittelwerth, dann ist nach einem bekannten Satze über bestimmte Integrale

$$K' = \int_0^\alpha \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(k^2+z^2)}} + \int_\alpha^\infty \frac{dz}{z\sqrt{\left(1+z^2\right)\left(1+\frac{k^2}{z^2}\right)}}$$

$$= \int_0^\alpha \frac{dz}{\sqrt{k^2+z^2}} \cdot \overset{\alpha}{\underset{0}{M}} \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} + \int_\alpha^\infty \frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}} \cdot \overset{\infty}{\underset{\alpha}{M}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2}{z^2}}},$$

also, wenn k, α und $\frac{k}{\alpha}$ zugleich unendlich klein werden, bis auf eine unendlich kleine Grösse

$$K' = \int_0^\alpha \frac{dz}{\sqrt{k^2+z^2}} + \int_\alpha^\infty \frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}},$$

oder, wenn man im ersten Integral $z = ku$, im zweiten $z = \frac{1}{u}$ setzt:

$$K' = \int_0^{\frac{\alpha}{k}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} + \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Da aber bekanntlich

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \lg(u+\sqrt{1+u^2}) = \lg u + \lg\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}\right)$$

ist, so ergiebt sich

$$K' = \lg\frac{\alpha}{k} + \lg\frac{1}{\alpha} + \lg\left(1+\sqrt{1+\frac{k^2}{\alpha^2}}\right) + \lg(1+\sqrt{1+\alpha^2}),$$

es ist also, wenn α und $\frac{k}{\alpha}$ unendlich klein sind, K' unendlich wenig von $\lg\frac{4}{k}$ verschieden.

B.

der opuscula varii argumenti p. 161 auf das elliptische Integral zweiter Gattung angewandt hat.

Aus der Gleichung

$$\frac{K \lg q}{K'} = -\pi$$

folgt

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}, \tag{27.}$$

und hiermit ist die Aufgabe, q als Function von k zu bestimmen, gelöst.

Die erlangten Resultate können jetzt so ausgesprochen werden, dass man von dem elliptischen Integral erster Gattung ausgeht, und zwar folgendermafsen:

Es sei

$$F(\varphi) = u,$$

wo

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad (0<k<1)$$

das elliptische Integral erster Gattung mit dem Modul k ist, so setze man φ als Function von u betrachtend,

$$\varphi = \operatorname{am} u.$$

Dann hat man, wenn K, K' die zu dem Modul k und dem Complementarmodul $k' = \sqrt{1-k^2}$ gehörenden vollständigen Integrale sind,

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},$$

und wenn

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}, \qquad x = \frac{\pi u}{2K} \quad \text{oder} \quad u = \frac{2Kx}{\pi}$$

gesetzt wird:

$$\sqrt{k}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \cdots}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \cdots}$$

$$\sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \cdots}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \cdots}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1+2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \cdots}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \cdots};$$

und es gilt für die Amplituden

$$\varphi = \operatorname{am} u = \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}, \quad \psi = \operatorname{am} v = \operatorname{am}\frac{2Ky}{\pi}, \quad \sigma = \operatorname{am}(u+v) = \operatorname{am}\frac{2K(x+y)}{\pi}$$

das Additionstheorem:

$$\sin\mathrm{am}(u+v) = \frac{\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,v\,\Delta\mathrm{am}\,v+\sin\mathrm{am}\,v\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v}$$

$$\cos\mathrm{am}(u+v) = \frac{\cos\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,v-\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v\,\Delta\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v}$$

$$\Delta\mathrm{am}(u+v) = \frac{\Delta\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,v-k^2\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v\cos\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v},$$

welches man auch durch die Gleichungen

$$F(\sigma) = F(\varphi)+F(\psi)$$

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi+\sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

$$\cos\sigma = \frac{\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\,\Delta\varphi\,\Delta\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta\varphi\,\Delta\psi-k^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

darstellen kann.

7.

Dem nachgewiesenen Zusammenhange zwischen den ϑ-Functionen und dem elliptischen Integral erster Gattung soll das entsprechende für die Integrale zweiter und dritter Gattung hinzugefügt werden. Da die Variable x der ϑ-Functionen dem Integrale erster Gattung proportional ist, so werden die Integrale zweiter und dritter Gattung im Folgenden als Functionen des Integrals erster Gattung von der nämlichen Amplitude betrachtet.

Während zu den bisherigen Entwickelungen die Formelsysteme (C.), (D.), (E.) hinreichten, ist es jetzt nothwendig, zu dem System (B.) zurückzukehren. Die erste Formel dieses Systems ist

$$\vartheta(x+y+z)\,\vartheta(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta(z)+\vartheta_1(x+y+z)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) = \vartheta(0)\,\vartheta(y+z)\,\vartheta(x+z)\,\vartheta(x+y).$$

Differentiirt man diese Gleichung nach z, setzt alsdann $z=0$ und benutzt das § 4 (23.) gewonnene Resultat

$$\vartheta_1'(0) = \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0),$$

so ergiebt sich:

$$\frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)}+\frac{\vartheta'(y)}{\vartheta(y)}-\frac{\vartheta'(x+y)}{\vartheta(x+y)} = \vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\,\frac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\,\frac{\vartheta_1(x+y)}{\vartheta(x+y)},$$

also, wenn man

$$(28.)\quad \zeta(x) = \frac{d \lg \vartheta(x)}{dx} = \frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} = \frac{2[2q\sin 2x - 4q^4 \sin 4x + 6q^9 \sin 6x - \cdots]}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \cdots}$$

setzt:

$$(29.)\quad \zeta(x) + \zeta(y) - \zeta(x+y) = \vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\,\frac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\,\frac{\vartheta_1(x+y)}{\vartheta(x+y)}.$$

Die Function $\zeta(x)$ steht mit dem elliptischen Integral zweiter Gattung im genauesten Zusammenhange. Man differentiire (29.) nach y, und setze alsdann $y = 0$, so ergiebt sich:

$$\zeta'(0) - \zeta'(x) = \left\{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\right\}^2 = \left\{\frac{2K}{\pi}\sqrt{k}\,\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\right\}^2,$$

wo

$$\zeta'(x) = \frac{d\zeta(x)}{dx}.$$

Führt man an die Stelle von x die Amplitude

$$\varphi = \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$$

ein, sodass

$$\frac{2Kx}{\pi} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\qquad \frac{2K}{\pi}\,dx = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},\qquad \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{k}.\sin\varphi,$$

so wird

$$\zeta'(0) - \zeta'(x) = \left\{\frac{2Kk}{\pi}\sin\varphi\right\}^2$$

$$[\zeta'(0) - \zeta'(x)]\,dx = \frac{2K}{\pi}\,\frac{k^2\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi,$$

also integrirt:

$$\zeta'(0).x - \zeta(x) = \frac{2K}{\pi}\int_0^\varphi \frac{k^2\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi$$

Setzt man nach Legendre

$$E(\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

so ist

$$\int_0^\varphi \frac{k^2\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi = F(\varphi) - E(\varphi),$$

also

$$(30.)\quad \zeta'(0).x - \zeta(x) = \frac{2K}{\pi}[F(\varphi) - E(\varphi)].$$

Hieraus ergiebt sich der Werth von $\zeta'(0)$, indem man $x = \frac{\pi}{2}$ setzt, woraus sich zugleich $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ergiebt. Da ferner nach (28.) $\zeta(x)$ für $x = \frac{\pi}{2}$ verschwindet, so wird

$$\frac{\pi}{2}\zeta'(0) = \frac{2K}{\pi}\left\{F\left(\frac{\pi}{2}\right) - E\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Bezeichnet man nach Legendre das vollständige Integral zweiter Gattung mit

$$E^{\mathrm{I}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi\, d\varphi$$

und der Uebereinstimmung wegen zugleich das vollständige Integral erster Gattung K mit

$$F^{\mathrm{I}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

so ergiebt sich

$$\zeta'(0) = \frac{4F^{\mathrm{I}}}{\pi^2}(F^{\mathrm{I}} - E^{\mathrm{I}}).$$

Dieser Werth, in (30.) eingesetzt, giebt

$$(31.) \qquad \frac{\pi}{2}\zeta(x) = F^{\mathrm{I}}E(\varphi) - E^{\mathrm{I}}F(\varphi).$$

Man bezeichne wie früher mit ψ, σ die Amplituden von $\frac{2Ky}{\pi}$, $\frac{2K(x+y)}{\pi}$, so hat man die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}\zeta(x) &= F^{\mathrm{I}}E(\varphi) - E^{\mathrm{I}}F(\varphi) \\
\frac{\pi}{2}\zeta(y) &= F^{\mathrm{I}}E(\psi) - E^{\mathrm{I}}F(\psi) \\
\frac{\pi}{2}\zeta(x+y) &= F^{\mathrm{I}}E(\sigma) - E^{\mathrm{I}}F(\sigma).
\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke substituire man in (29.), so geht diese Gleichung in

$$F^{\mathrm{I}}[E(\varphi)+E(\psi)-E(\sigma)] - E^{\mathrm{I}}[F(\varphi)+F(\psi)-F(\sigma)] = F^{\mathrm{I}}k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\sigma$$

oder, da

$$F(\varphi)+F(\psi)-F(\sigma) = 0$$

ist, in

$$(32.) \qquad E(\varphi)+E(\psi)-E(\sigma) = k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\sigma$$

über. Dies ist das Additionstheorem der elliptischen Integrale zweiter Gattung.

Man multiplicire (31.) mit

$$\frac{2}{\pi}dx = \frac{1}{K}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

und integrire, so ergiebt sich

$$\lg\frac{\vartheta(x)}{\vartheta(0)} = \int_0^\varphi \frac{F^{\mathrm{I}}E(\varphi)-E^{\mathrm{I}}F(\varphi)}{F^{\mathrm{I}}\Delta\varphi}d\varphi$$

oder

$$\vartheta(x) = \vartheta(0).e^{\int_0^\varphi \frac{F^{\mathrm{I}}E(\varphi)-E^{\mathrm{I}}F(\varphi)}{F^{\mathrm{I}}\Delta\varphi}d\varphi},$$

eine Gleichung, welche die Function $\vartheta(x)$ vermittelst der Integrale erster und zweiter Gattung darstellt.

Die Gleichung (29.) führt auch dazu, die Integrale dritter Gattung vermittelst der ϑ-Functionen darzustellen. Man setze in (29.) $y=a$ und $y=-a$ und bilde die Differenz beider Resultate, so ergiebt sich:

$$2\zeta(a)+\zeta(x-a)-\zeta(x+a) = \vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta(a)}\left\{\frac{\vartheta_1(x+a)}{\vartheta(x+a)}+\frac{\vartheta_1(x-a)}{\vartheta(x-a)}\right\}.$$

Nach (C. 17) geht diese Gleichung in

$$\zeta(a)+\tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg\frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)} = \frac{\vartheta_1(a)\vartheta_2(a)\vartheta_3(a)\vartheta_1^2(x)}{\vartheta(a)\vartheta(x+a)\vartheta(x-a)} \tag{33.}$$

über. Wendet man auf den Nenner der rechten Seite (C. 6) an und setzt

$$\varphi = \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}, \qquad \alpha = \mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi},$$

so verwandelt sich die Gleichung in:

$$\zeta(a)+\tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg\frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)} = \vartheta^2(0)\frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta(a)}\frac{\vartheta_2(a)}{\vartheta(a)}\frac{\vartheta_3(a)}{\vartheta(a)}\cdot\frac{\frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}}{1-\frac{\vartheta_1^2(a)\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(a)\vartheta^2(x)}}$$

$$= \frac{2K}{\pi}\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\frac{k^2\sin^2\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}.$$

Indem man mit $\frac{2K}{\pi}dx = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ multiplicirt und integrirt, ergiebt sich:

$$x\zeta(a)+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)} = \sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\int_0^\varphi\frac{k^2\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist das elliptische Integral dritter Gattung in der in den *Fundamenten* eingeführten Gestalt, welches ich mit $\Pi(\varphi, \alpha)$ bezeichne, und in welchem der von Legendre mit n bezeichnete Parameter durch $-k^2 \sin^2 \alpha$ ersetzt ist. Die Formel

$$(34.)\qquad \Pi(\varphi, \alpha) = \int_0^{\varphi} \frac{k^2 \sin\alpha \cos\alpha\, \Delta\alpha \sin^2\varphi\, d\varphi}{(1-k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi)\, \Delta\varphi} = x\zeta(a) + \tfrac{1}{2}\lg \frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)}$$

ist die Fundamentalgleichung für das Integral dritter Gattung. Durch dieselbe wird die von drei Variabeln φ, α, k abhangende Function Π auf Functionen von zwei Variabeln und, wenn φ und α reell sind, von nur zwei reellen Argumenten zurückgeführt.

Aus (34.) folgen mit grosser Leichtigkeit die Haupteigenschaften der Integrale dritter Gattung. Man setze $x = \frac{\pi}{2}$, woraus $\varphi = \frac{\pi}{2}$ folgt, so wird

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) = \frac{\pi}{2}\zeta(a) = F^{\mathrm{I}} E(\alpha) - E^{\mathrm{I}} F(\alpha),$$

wodurch das vollständige Integral dritter Gattung auf die vollständigen und die unbestimmten Integrale erster und zweiter Gattung zurückgeführt wird.

Vertauscht man in (34.) die Amplitude φ mit dem Parameter α und subtrahirt beide Resultate von einander, so ergiebt sich:

$$(35.)\qquad \Pi(\varphi, \alpha) - \Pi(\alpha, \varphi) = x\zeta(a) - a\zeta(x) = F(\varphi) E(\alpha) - E(\varphi) F(\alpha),$$

worin das Theorem von der Vertauschung der Amplitude und des Parameters enthalten ist.

Wendet man (34.) auf die drei Amplituden

$$\varphi = \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}, \qquad \psi = \operatorname{am}\frac{2Ky}{\pi}, \qquad \sigma = \operatorname{am}\frac{2K(x+y)}{\pi}$$

an und schreibt $\vartheta(x-a)$ für $\vartheta(a-x)$, so ergiebt sich:

$$\Pi(\varphi, \alpha) = x\zeta(a) + \tfrac{1}{2}\lg \frac{\vartheta(x-a)}{\vartheta(x+a)}$$

$$\Pi(\psi, \alpha) = y\zeta(a) + \tfrac{1}{2}\lg \frac{\vartheta(y-a)}{\vartheta(y+a)}$$

$$\Pi(\sigma, \alpha) = (x+y)\zeta(a) + \tfrac{1}{2}\lg \frac{\vartheta(x+y-a)}{\vartheta(x+y+a)},$$

und hieraus:

$$\Pi(\varphi, \alpha)+\Pi(\psi, \alpha)-\Pi(\sigma, \alpha) = \tfrac{1}{2}\lg \frac{\vartheta(x-a)\,\vartheta(y-a)\,\vartheta(x+y+a)}{\vartheta(x+a)\,\vartheta(y+a)\,\vartheta(x+y-a)}.$$

Den aus ϑ-Functionen zusammengesetzten Quotienten auf der rechten Seite dieser Gleichung verwandelt man mit Hülfe der bereits oben angewandten, dem Formelsystem (B.) angehörenden Gleichung

$$\vartheta(0)\,\vartheta(y+z)\,\vartheta(x+z)\,\vartheta(x+y) = \vartheta(x+y+z)\,\vartheta(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta(z)+\vartheta_1(x+y+z)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta_1(z)$$

in einen nur von der Function sinus amplitudinis abhangenden Ausdruck. Man setze nämlich $z = -a$ und $z = a$, und dividire beide Resultate durch einander, so ergiebt sich, wenn man überdies

$$A = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(x+y-a), \qquad A' = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(x+y+a)$$

setzt:

$$\frac{\vartheta(x-a)\vartheta(y-a)\vartheta(x+y+a)}{\vartheta(x+a)\vartheta(y+a)\vartheta(x+y-a)} = \frac{1-\dfrac{\vartheta_1(a)}{\vartheta(a)}\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\dfrac{\vartheta_1(x+y-a)}{\vartheta(x+y-a)}}{1+\dfrac{\vartheta_1(a)}{\vartheta(a)}\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\dfrac{\vartheta_1(x+y+a)}{\vartheta(x+y+a)}} = \frac{1-k^2\sin\alpha\sin\varphi\sin\psi\sin A}{1+k^2\sin\alpha\sin\varphi\sin\psi\sin A'},$$

und hierdurch geht die oben erhaltene Formel in

$$(36.)\quad \begin{cases} \Pi(\varphi, \alpha)+\Pi(\psi, \alpha)-\Pi(\sigma, \alpha) = \tfrac{1}{2}\lg\dfrac{1-k^2\sin\alpha\sin\varphi\sin\psi\sin A}{1+k^2\sin\alpha\sin\varphi\sin\psi\sin A'}, \\ F(A) = F(\sigma)-F(\alpha), \qquad F(A') = F(\sigma)+F(\alpha) \end{cases}$$

über, worin das Additionstheorem der Integrale dritter Gattung enthalten ist.

Einen ähnlichen Satz giebt es für die Addition der Parameter a bei unveränderter Amplitude. Diesen kann man vermittelst des Satzes (35.) von der Vertauschung der Amplitude und des Parameters aus (36.) ableiten, indem man

$$\alpha = \operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}, \qquad \beta = \operatorname{am}\frac{2Kb}{\pi}, \qquad \gamma = \operatorname{am}\frac{2K(a+b)}{\pi}$$

setzt, sodass

$$F(\alpha)+F(\beta)-F(\gamma) = 0$$

ist. Die Gleichung (35.) ergiebt nämlich:

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi,\alpha) &= \Pi(\alpha,\varphi)+F(\varphi)E(\alpha)-E(\varphi)F(\alpha) \\ \Pi(\varphi,\beta) &= \Pi(\beta,\varphi)+F(\varphi)E(\beta)-E(\varphi)F(\beta) \\ \Pi(\varphi,\gamma) &= \Pi(\gamma,\varphi)+F(\varphi)E(\gamma)-E(\varphi)F(\gamma), \end{aligned}$$

und hieraus folgt:

$$\Pi(\varphi,\alpha)+\Pi(\varphi,\beta)-\Pi(\varphi,\gamma) = \begin{cases} \Pi(\alpha,\varphi)+\Pi(\beta,\varphi)-\Pi(\gamma,\varphi) \\ +F(\varphi)[E(\alpha)+E(\beta)-E(\gamma)] \\ -E(\varphi)[F(\alpha)+F(\beta)-F(\gamma)]. \end{cases}$$

Aber nach (36.) ist

$$\Pi(\alpha,\varphi)+\Pi(\beta,\varphi)-\Pi(\gamma,\varphi) = \tfrac{1}{2}\lg\frac{1-k^2\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi\sin\Phi}{1+k^2\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi\sin\Phi'},$$

$$F(\Phi) = F(\gamma)-F(\varphi), \qquad F(\Phi') = F(\gamma)+F(\varphi),$$

während nach (32.)

$$E(\alpha)+E(\beta)-E(\gamma) = k^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

folglich ergiebt sich:

$$(36^*.)\begin{cases}\Pi(\varphi,\alpha)+\Pi(\varphi,\beta)-\Pi(\varphi,\gamma)=\tfrac{1}{2}\lg\dfrac{1-k^2\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi\sin\Phi}{1+k^2\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi\sin\Phi'}+k^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\, F(\varphi), \\ F(\gamma) = F(\alpha)+F(\beta), \quad F(\Phi) = F(\gamma)-F(\varphi), \quad F(\Phi') = F(\gamma)+F(\varphi)\end{cases}$$

als Theorem von der Addition der Parameter der Integrale dritter Gattung.

Schliesslich mögen die Theoreme (17.), (32.), (36.) von der Addition der Amplituden für die drei Gattungen der elliptischen Integrale zusammengestellt werden. Es sei

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

$$E(\varphi) = \int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi,$$

$$\Pi(\varphi,\alpha) = \int_0^\varphi \frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi} = x\zeta(a)+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)},$$

und man bestimme aus den beiden Amplituden φ, ψ, eine dritte σ den Gleichungen

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi+\sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

$$\cos\sigma = \frac{\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\,\Delta\varphi\,\Delta\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta\varphi\,\Delta\psi-k^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

gemäſs, so hat man:

$$F(\varphi)+F(\psi)-F(\sigma) = 0$$

$$E(\varphi)+E(\psi)-E(\sigma) = k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma$$

$$\Pi(\varphi,\alpha)+\Pi(\psi,\alpha)-\Pi(\sigma,\alpha) = \tfrac{1}{2}\lg\frac{1-k^2\sin\alpha\sin\varphi\sin\psi\sin A}{1+k^2\sin\alpha\sin\varphi\sin\psi\sin A'},$$

wo

$$F(A) = F(\sigma) - F(\alpha), \qquad F(A') = F(\sigma) + F(\alpha).$$

Man sieht daraus, dass, wenn $P(\varphi)$ irgend ein elliptisches Integral bedeutet, der Ausdruck

$$P(\varphi) + P(\psi) - P(\sigma)$$

sich immer durch algebraische und logarithmische Functionen von $\sin\varphi$ und $\sin\psi$ darstellen läſst.

8.

Die Formeln (A.) § 2 und (B.) § 3 sowie die aus den letzteren hergeleiteten Formeln (29.), (33.), (34.) § 7 sind von so groſser Wichtigkeit für die Theorie der elliptischen Functionen, dass es zweckmäſsig ist, auf dieselben noch einmal zurückzukommen, um alle Formeln derselben Art, welche zwischen ϑ-Functionen möglich sind, in einem vollständigen System derselben vor Augen zu haben.

Die 12 Formeln (A.) sind die Fundamentalformeln, aus welchen alle Relationen zwischen ϑ-Functionen mit ein und demselben Werthe von q abgeleitet werden können. Durch lineare Verbindungen kann man aus den Formeln (A.) andere ableiten, welche mit denselben als gleichberechtigt anzusehen sind. Aber alle diese Formeln lassen sich in einer übersichtlichen Art zusammenfassen.

Aus den Formeln (A. 1, 2, 3, 4) ergeben sich die vier Producte $\vartheta_\alpha(w)\,\vartheta_\alpha(x)\,\vartheta_\alpha(y)\,\vartheta_\alpha(z)$ für $\alpha = 0, 1, 2, 3$ als lineare Ausdrücke der vier Producte $\vartheta_\alpha(w')\,\vartheta_\alpha(x')\,\vartheta_\alpha(y')\,\vartheta_\alpha(z')$ für dieselben Werthe von α, und zwar bestehen unter diesen zwei Systemen von Producten genau dieselben Gleichungen wie nach den Formeln (10.) unter den beiden Systemen von Variabeln w, x, y, z und w', x', y', z'. Genau dieselbe lineare Abhängigkeit zwischen zwei Systemen von vier anderen Producten aus ϑ-Functionen erhält man aus den Formeln (A. 5, 6), (A. 7, 8), (A. 9, 10), (A. 11), sodass man das auf diese Weise gewonnene Resultat in fünf Systemen von je vier Formeln auf folgende Art darstellen kann:

Man verstehe unter λ, μ, ν irgend eine Permutation der Zahlen 0, 2, 3 und bezeichne mit W, X, Y, Z eines der in der nachstehenden Tabelle enthaltenen Systeme von vier aus ϑ-Functionen gebildeten Producten

(F.)

	W	X	Y	Z
(1.)	$\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)$	$\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z)$	$\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)$	$\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)$
(2.)	$\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)$	$\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta(y)\vartheta(z)$	$\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)$	$\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)$
(3.)	$\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)$	$\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)$	$\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)$	$\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta(y)\vartheta(z)$
(4.)	$\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)$	$\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta(z)$	$\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)$	$\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)$
(5.)	$\vartheta_1(w)\vartheta_\lambda(x)\vartheta_\mu(y)\vartheta_\nu(z)$	$\vartheta_\lambda(w)\vartheta_1(x)\vartheta_\nu(y)\vartheta_\mu(z)$	$\vartheta_\mu(w)\vartheta_\nu(x)\vartheta_1(y)\vartheta_\lambda(z)$	$\vartheta_\nu(w)\vartheta_\mu(x)\vartheta_\lambda(y)\vartheta_1(z)$

und mit W', X', Y', Z' die nämlichen aus den Argumenten w', x', y', z' gebildeten Producte von ϑ-Functionen, so bestehen zwischen den beiden Systemen von vier Producten die Relationen:

$$2W' = W+X+Y+Z, \qquad 2X' = W+X-Y-Z,$$
$$2Y' = W-X+Y-Z, \qquad 2Z' = W-X-Y+Z.$$

Aus diesen $4.5 = 20$ Relationen können $5.12 = 60$ Gleichungen gebildet werden, in welchen auf der rechten, wie auf der linken Seite nur zwei Producte von ϑ-Functionen stehen.

Mit Hülfe von (F.) läfst sich das Formelsystem (B.) zu einem System von 13 Doppelgleichungen vervollständigen. Führt man zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$s = x+y+z, \quad \xi = y+z, \quad \eta = x+z, \quad \zeta = x+y$$

ein, so ergeben sich folgende 13 Doppelgleichungen:

(G.)

$$(1.)\ \vartheta_3(0)\vartheta_3(\xi)\vartheta_3(\eta)\vartheta_3(\zeta) = \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) = \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)$$

$$(2.)\ \vartheta_2(0)\vartheta_2(\xi)\vartheta_2(\eta)\vartheta_2(\zeta) = \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) + \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) = \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta(y)$$

$$(3.)\ \vartheta(0)\vartheta(\xi)\vartheta(\eta)\vartheta(\zeta) = \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) = \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)$$

$$(4.)\ \vartheta_3(0)\vartheta_3(\xi)\vartheta(\eta)\vartheta(\zeta) = \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) = \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)$$

$$(5.)\ \vartheta_2(0)\vartheta_2(\xi)\vartheta_1(\eta)\vartheta_1(\zeta) = \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) + \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) = \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta(y)$$

$$(6.)\ \vartheta(0)\vartheta(\xi)\vartheta_3(\eta)\vartheta_3(\zeta) = \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) = \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)$$

$$(7.)\ \vartheta_3(0)\vartheta_3(\xi)\vartheta_2(\eta)\vartheta_2(\zeta) = \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta(y)\vartheta(z) = \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) + \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta_1(y)$$

$$(8.)\ \vartheta_2(0)\vartheta_2(\xi)\vartheta_3(\eta)\vartheta_3(\zeta) = \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) = \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) + \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta(y)$$

$$(9.)\ \vartheta(0)\vartheta(\xi)\vartheta_1(\eta)\vartheta_1(\zeta) = \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) = \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) + \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta(y)$$

$$(10.)\ \vartheta_3(0)\vartheta_3(\xi)\vartheta_1(\eta)\vartheta_1(\zeta) = \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) + \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) = \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta(y)$$

$$(11.)\ \vartheta_2(0)\vartheta_2(\xi)\vartheta(\eta)\vartheta(\zeta) = \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) = \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)$$

$$(12.)\ \vartheta(0)\vartheta(\xi)\vartheta_2(\eta)\vartheta_2(\zeta) = \vartheta(s)\vartheta(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta_1(s)\vartheta_1(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) = \vartheta_2(s)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_3(s)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)$$

$$(13.)\ \vartheta_\lambda(0)\vartheta_1(\xi)\vartheta_\nu(\eta)\vartheta_\mu(\zeta) = \vartheta_1(s)\vartheta_\lambda(x)\vartheta_\mu(y)\vartheta_\nu(z) - \vartheta_\lambda(s)\vartheta_1(x)\vartheta_\nu(y)\vartheta_\mu(z) = \vartheta_\nu(s)\vartheta_\mu(x)\vartheta_\lambda(y)\vartheta_1(z) + \vartheta_\mu(s)\vartheta_\nu(x)\vartheta_1(y)$$

Indem man die 13 Formeln (G.) nach einer der Variabeln x, y, z logarithmisch differentiirt und dann die Variable gleich Null setzt, erhält man ein System von 15 Formeln, welche der Gleichung (29.) ähnlich sind. Jede dieser 15 Formeln enthält auf der linken Seite ein Aggregat der Form

$$\frac{\vartheta_\lambda'(x)}{\vartheta_\lambda(x)}+\frac{\vartheta_\mu'(y)}{\vartheta_\mu(y)}+\frac{\vartheta_\nu'(z)}{\vartheta_\nu(z)},$$

wo x, y, z drei Variabele bedeuten, zwischen welchen die Relation

$$x+y+z = 0$$

besteht. Die Indices λ, μ, ν haben die Werthe $0, 1, 2, 3$ und können von einander verschieden sein oder coincidiren. Auf der rechten Seite dagegen steht ein Product von drei Quotienten aus ϑ-Functionen, deren Argumente x, y, z sind.

Die möglichen Combinationen der Indices λ, μ, ν führen im Ganzen auf zwanzig Fälle. Von diesen lassen sich je fünf durch Aenderung der Argumente um $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}i\lg q$ auf *eine* Formel zurückführen, in welcher $\lambda = \mu = \nu$. Aber die fünf Formeln, in welchen $\lambda = \mu = \nu = 1$, oder welche hieraus durch Argumentänderungen herzuleiten sind, nämlich die Combinationen 111, 100, 122, 133, 023 müssen ausgeschlossen werden. In diesen fünf Fällen läſst sich nämlich das oben angeführte Aggregat zwar auch durch doppelt periodische Functionen resp. von x, y, z ausdrücken, aber dieser Ausdruck ist kein bloſses Product.

Die 15 übrig bleibenden Formeln, welche sich durch Argumentänderung auf 000, 222, 333 zurückführen lassen, können in folgende vier Formeln zusammengefaſst werden:

(H.)

$$(1.)\quad \frac{\vartheta_\lambda'(x)}{\vartheta_\lambda(x)}+\frac{\vartheta_\lambda'(y)}{\vartheta_\lambda(y)}+\frac{\vartheta_\lambda'(z)}{\vartheta_\lambda(z)} = (-1)^{\lambda-1}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_\lambda(0)}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_\lambda(x)}\frac{\vartheta_1(y)}{\vartheta_\lambda(y)}\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_\lambda(z)}$$

$$(2.)\quad \frac{\vartheta_\mu'(x)}{\vartheta_\mu(x)}+\frac{\vartheta_\mu'(y)}{\vartheta_\mu(y)}+\frac{\vartheta_\nu'(z)}{\vartheta_\nu(z)} = -\varepsilon\,.\,\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_\nu(0)}\frac{\vartheta_\lambda(x)}{\vartheta_\mu(x)}\frac{\vartheta_\lambda(y)}{\vartheta_\mu(y)}\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_\nu(z)}$$

$$(3.)\quad \frac{\vartheta_1'(x)}{\vartheta_1(x)}+\frac{\vartheta_1'(y)}{\vartheta_1(y)}+\frac{\vartheta_\lambda'(z)}{\vartheta_\lambda(z)} = -\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_\lambda(0)}\frac{\vartheta_\lambda(x)}{\vartheta_1(x)}\frac{\vartheta_\lambda(y)}{\vartheta_1(y)}\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_\lambda(z)}$$

$$(4.)\quad \frac{\vartheta_\mu'(x)}{\vartheta_\mu(x)}+\frac{\vartheta_\nu'(y)}{\vartheta_\nu(y)}+\frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} = \frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_\lambda(0)}\frac{\vartheta_\nu(x)}{\vartheta_\mu(x)}\frac{\vartheta_\mu(y)}{\vartheta_\nu(y)}\frac{\vartheta_\lambda(z)}{\vartheta_1(z)}$$

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}\cdot\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}}.$$

In diesen Formeln bedeuten λ, μ, ν die drei Indices $0, 2, 3$ in irgend einer Permutation und $\vartheta'_\lambda(x)$ die Ableitung von $\vartheta_\lambda(x)$, es repräsentiren daher die erste, dritte, vierte dieser Formeln je drei, die zweite sechs verschiedene Gleichungen.

In derselben Weise, in welcher aus (29.) zu (33.) übergegangen wurde, kann man aus (H.) 16 verschiedene Gleichungen ableiten, in denen die linke Seite die Form

$$\frac{\vartheta'_\lambda(y)}{\vartheta_\lambda(y)} + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg\frac{\vartheta_\mu(x-y)}{\vartheta_\mu(x+y)}$$

hat, wo $\lambda, \mu = 0, 1, 2, 3$. Diese 16 Formeln lassen sich in fünf Gleichungen zusammenfassen. Es bezeichne $\lambda, \mu, \nu, 1$ eine Permutation der vier Indices $0, 1, 2, 3$, so hat man:

(I.)

$$(1.)\quad \frac{\vartheta'_\lambda(y)}{\vartheta_\lambda(y)} + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg\frac{\vartheta_\lambda(x-y)}{\vartheta_\lambda(x+y)} = (-1)^\lambda \frac{\vartheta_1(y)\,\vartheta_\mu(y)\,\vartheta_\nu(y)\,\vartheta_1^2(x)}{\vartheta_\lambda(y)\vartheta_\lambda(x+y)\vartheta_\lambda(x-y)} = (-1)^\lambda\vartheta^2(0)\frac{\vartheta_1(y)\,\vartheta_\mu(y)\,\vartheta_\nu(y)\,\vartheta_1^2(x)}{\vartheta_\lambda(y)\,.\,M_\lambda}$$

$$(2.)\quad \frac{\vartheta'_\mu(y)}{\vartheta_\mu(y)} + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg\frac{\vartheta_\nu(x-y)}{\vartheta_\nu(x+y)} = \varepsilon\cdot\frac{\vartheta_1(y)\,\vartheta_\lambda(y)\,\vartheta_\nu(y)\,\vartheta_\lambda^2(x)}{\vartheta_\mu(y)\vartheta_\nu(x+y)\vartheta_\nu(x-y)} = \varepsilon\,\vartheta^2(0)\frac{\vartheta_1(y)\vartheta_\lambda(y)\,\vartheta_\nu(y)\,\vartheta_\lambda^2(x)}{\vartheta_\mu(y)\,.\,M_\nu}$$

$$(3.)\quad \frac{\vartheta'_1(y)}{\vartheta_1(y)} + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg\frac{\vartheta_\lambda(x-y)}{\vartheta_\lambda(x+y)} = \frac{\vartheta(y)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_\lambda^2(x)}{\vartheta_1(y)\vartheta_\lambda(x+y)\vartheta_\lambda(x-y)} = \vartheta^2(0)\frac{\vartheta(y)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_\lambda^2(x)}{\vartheta_1(y)\,.\,M_\lambda}$$

$$(4.)\quad \frac{\vartheta'_\lambda(y)}{\vartheta_\lambda(y)} + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg\frac{\vartheta_1(x-y)}{\vartheta_1(x+y)} = \frac{\vartheta_1(y)\,\vartheta_\mu(y)\,\vartheta_\nu(y)\,\vartheta_\lambda^2(x)}{\vartheta_\lambda(y)\,\vartheta_1(x+y)\,\vartheta_1(x-y)} = \vartheta^2(0)\frac{\vartheta_1(y)\,\vartheta_\mu(y)\,\vartheta_\nu(y)\,\vartheta_\lambda^2(x)}{\vartheta_\lambda(y)\,.\,M_1}$$

$$(5.)\quad \frac{\vartheta'_1(y)}{\vartheta_1(y)} + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg\frac{\vartheta_1(x-y)}{\vartheta_1(x+y)} = \frac{\vartheta(y)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_1^2(x)}{\vartheta_1(y)\,\vartheta_1(x+y)\,\vartheta_1(x-y)} = \vartheta^2(0)\frac{\vartheta(y)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\,\vartheta_1^2(x)}{\vartheta_1(y)\,.\,M_1}.$$

Hierin hat ε wie oben die Bedeutung

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}\cdot\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}}$$

und es ist zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
M &= \vartheta^2(x)\,\vartheta^2(y) - \vartheta_1^2(x)\,\vartheta_1^2(y) = \vartheta_3^2(x)\,\vartheta_3^2(y) - \vartheta_2^2(x)\,\vartheta_2^2(y)\\
M_1 &= \vartheta_1^2(x)\,\vartheta^2(y) - \vartheta^2(x)\,\vartheta_1^2(y) = \vartheta_3^2(x)\,\vartheta_2^2(y) - \vartheta_2^2(x)\,\vartheta_3^2(y)\\
M_2 &= \vartheta_2^2(x)\,\vartheta^2(y) - \vartheta_3^2(x)\,\vartheta_1^2(y) = \vartheta^2(x)\,\vartheta_2^2(y) - \vartheta_1^2(x)\,\vartheta_3^2(y)\\
M_3 &= \vartheta_3^2(x)\,\vartheta^2(y) - \vartheta_2^2(x)\,\vartheta_1^2(y) = \vartheta^2(x)\,\vartheta_3^2(y) - \vartheta_1^2(x)\,\vartheta_2^2(y)
\end{aligned}$$

gesetzt.

Man kann die obigen 5 Formeln (I.) auch in die *eine*

$$\frac{\vartheta'_\mu(y)}{\vartheta_\mu(y)}+\tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg\frac{\vartheta_\nu(x-y)}{\vartheta_\nu(x+y)} = \varepsilon\frac{\vartheta(y)\vartheta_1(y)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)}{\vartheta_\nu(x+y)\vartheta_\nu(x-y)}\cdot\frac{\vartheta^2_\lambda(x)}{\vartheta^2_\mu(y)} = \varepsilon\vartheta^2(0)\frac{\vartheta(y)\vartheta_1(y)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)}{M_\nu}\cdot\frac{\vartheta^2_\lambda(x)}{\vartheta^2_\mu(y)}$$

zusammenfassen, wenn man die in dieser Formel vorkommenden Indices λ, μ, ν folgendermaſsen bestimmt:

Die vier Indices λ, μ, ν, 1 bilden entweder eine vollständige Permutation der Zahlen 0, 1, 2, 3, oder diese vier Zahlen coincidiren paarweise, d. h. es findet eins der 3 Gleichungspaare

$$\mu = \nu, \qquad \lambda = 1,$$
$$\mu = 1, \qquad \lambda = \nu$$
$$\nu = 1, \qquad \lambda = \mu$$

statt, oder endlich es ist

$$\mu = \nu = \lambda = 1.$$

Aus dem Gleichungssystem (I.) kann man endlich, wenn man, wie oben

$$\varphi = \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}, \qquad \alpha = \operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}$$

setzt, 16 Formeln ableiten, welche der Formel (34.) ähnlich sind, nämlich:

$$(1.)\qquad \frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)} = \int_0^\varphi\frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}$$

$$(2.)\qquad \frac{\vartheta'_1(a)}{\vartheta_1(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)} = \int_0^\varphi\frac{\cos\alpha\,\Delta\alpha\,d\varphi}{\sin\alpha\,(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}$$

$$(3.)\qquad \frac{\vartheta'_2(a)}{\vartheta_2(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)} = \int_0^\varphi\frac{-\sin\alpha\,\Delta\alpha\,\Delta\varphi\,d\varphi}{\cos\alpha\,(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)}$$

$$(4.)\qquad \frac{\vartheta'_3(a)}{\vartheta_3(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)} = \int_0^\varphi\frac{-k^2\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\alpha\,(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}$$

$$(5.)\qquad \frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(a-x)}{\vartheta_1(a+x)} = \int_0^\varphi\frac{\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\,d\varphi}{(\sin^2\varphi-\sin^2\alpha)\,\Delta\varphi}$$

$$(6.)\qquad \frac{\vartheta'_1(a)}{\vartheta_1(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(a-x)}{\vartheta_1(a+x)} = \int_0^\varphi\frac{\cos\alpha\,\Delta\alpha\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sin\alpha\,(\sin^2\varphi-\sin^2\alpha)\,\Delta\varphi}$$

$$(7.)\qquad \frac{\vartheta'_2(a)}{\vartheta_2(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(a-x)}{\vartheta_1(a+x)} = \int_0^\varphi\frac{\sin\alpha\,\Delta\alpha\cos^2\varphi\,d\varphi}{\cos\alpha\,(\sin^2\varphi-\sin^2\alpha)\,\Delta\varphi}$$

$$(8.)\qquad \frac{\vartheta'_3(a)}{\vartheta_3(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(a-x)}{\vartheta_1(a+x)} = \int_0^\varphi\frac{\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\varphi\,d\varphi}{\Delta\alpha\,(\sin^2\varphi-\sin^2\alpha)}$$

(9.) $$\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(a-x)}{\vartheta_2(a+x)} = \int_0^\varphi \frac{\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\,\Delta\varphi\,d\varphi}{\cos^2\alpha-\Delta^2\alpha\sin^2\varphi}$$

(10.) $$\frac{\vartheta_1'(a)}{\vartheta_1(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(a-x)}{\vartheta_2(a+x)} = \int_0^\varphi \frac{\cos\alpha\,\Delta\alpha\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sin\alpha(\cos^2\alpha-\Delta^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi}$$

(11.) $$\frac{\vartheta_2'(a)}{\vartheta_2(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(a-x)}{\vartheta_2(a+x)} = \int_0^\varphi \frac{k'^2\sin\alpha\,\Delta\alpha\sin^2\varphi\,d\varphi}{\cos\alpha(\cos^2\alpha-\Delta^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi}$$

(12.) $$\frac{\vartheta_3'(a)}{\vartheta_3(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(a-x)}{\vartheta_2(a+x)} = \int_0^\varphi \frac{k'^2\sin\alpha\cos\alpha\,d\varphi}{\Delta\alpha(\cos^2\alpha-\Delta^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi}$$

(13.) $$\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(a-x)}{\vartheta_3(a+x)} = \int_0^\varphi \frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\cos^2\varphi\,d\varphi}{(\Delta^2\alpha-k^2\cos^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi}$$

(14.) $$\frac{\vartheta_1'(a)}{\vartheta_1(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(a-x)}{\vartheta_3(a+x)} = \int_0^\varphi \frac{\cos\alpha\,\Delta\alpha\,\Delta\varphi\,d\varphi}{\sin\alpha(\Delta^2\alpha-k^2\cos^2\alpha\sin^2\varphi)}$$

(15.) $$\frac{\vartheta_2'(a)}{\vartheta_2(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(a-x)}{\vartheta_3(a+x)} = \int_0^\varphi \frac{-k'^2\sin\alpha\,\Delta\alpha\,d\varphi}{\cos\alpha(\Delta^2\alpha-k^2\cos^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi}$$

(16.) $$\frac{\vartheta_3'(a)}{\vartheta_3(a)}x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(a-x)}{\vartheta_3(a+x)} = \int_0^\varphi \frac{-k^2k'^2\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\alpha(\Delta^2\alpha-k^2\cos^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi}.$$
